



来源于小红书@贝栗子

26高照-数量关系笔记

共16章

(含思维导图)

小红书@贝栗子

自己学习整理的!

难免有疏漏!

禁止搬运洗稿二传盗卖

以任何形式倒卖,侵权必究!

小红书@贝栗子

备注说明：该笔记是自己听完课整理的，整理不易！！盗笔记爬笔记倒卖引流的，追究到底！

不得擅自以任何形式搬运盗图倒卖送！

未经个人允许不得擅自传播文件！

仅用于本人学习使用

盗卖搬运爬笔记引流的 必究！请谨慎！

盗卖搬运爬笔记引流的 必究！请谨慎！

打印我的笔记换种形式倒卖的
公众号盗我笔记的，侵权必究！

一经发现追究到底！

近期有账号搬运打印盗卖我的笔记，请
尊重我的劳动成果，如发现，请举报，

谢谢

祝大家都能上岸~~

第一章 倍数特性

解题思维：利用选项结合倍数关系，先排除，排除不完再代入

如果 $A=B \times C$ (B 、 C 均为整数)，那么， A 能被 B 整除，且 A 能被 C 整除。

口诀法

识别：(常用于3、4、5、9)：3和9看各位数字之和，5看末位，4看末两位。

常见：

3/9 → 看各位数字之和能否被3/9整除，例：12345

2/5 → 看数字末一位能否被2/5整除，例：12/25

4/25 → 看数字末两位能否被4/25整除，例：12/24

8/125 → 看数字末三位能否被8/125整除，例：12/64

一、整除型

拆分法

一个数 = 接近且明显能被整除的数 ± 零头，只看零头
没口诀，常用于7、11、13

例子：623 ÷ 7 把623拆成7的倍数 ± 零头，只看零头能否被7整除

所以623能被7整除

因式分解法

复杂倍数常用于6、12、18、24等

例子：18 = 2 × 9 24 = 3 × 8 (不能4 × 6)

分解成两个互质(互质指两数没有公约数)的数，同时满足能被这两个数整除。



来源于小红书@贝栗子

特性：每人、均分、多几个、少几个 均分思想：每人几个

若总数 = $ax + b$ ，则(总数 - b)能被 a 整除。(a、x均为整数)

二、余数型

例子1：一堆苹果分给一些人，平均每人分10个，还剩3个，问这堆苹果有多少个？
总数 - 3 能够被10整除的选项就是答案

例子2：438是12倍数吗？-----不是12是4的倍数--看末两位38--不能被4除

小红书：@贝栗子

识别：分数、比例、百分数、倍数

对象特征：描述对象为不可分割的整体，整数才有意义。人、车、年龄等

三、比例型

常见

①男员工是女员工的 $\frac{3}{5}$ (分数)

②男员工与女员工之比3:5(比例)

③男员工是女员工的60%(百分数)

④男员工是女员工的0.6倍(倍数)

考法

考法一： $\frac{\text{男}}{\text{女}} = \frac{7}{3}$

考法二： $\frac{\text{男}-2}{\text{女}} = \frac{7}{4}$ 男-2是7的倍数

考法三：A与非A思想 $\frac{\text{甲}}{\text{其他}} = \frac{7}{3}$ 总人数是10的倍数

整除型

【例1】(2025 联考)某绿色有机农场把 61600 平方米耕地划分为玉米、大豆、稻谷三个作物区,玉米和大豆的面积比是 7:2,大豆和稻谷的面积比是 6:1,则玉米的面积是多少平方米?

490—28 A. 46200

490—18 B. 47200

490—8 C. 48200

490+2 D. 49200

方法一 $\frac{\text{玉米}}{\text{大豆}} = \frac{7}{2}$ 说明玉米面积是 7 的倍数秒 A

方法二: 玉米:大豆:稻 = 21:6:1
3 和 7

看选项能不能被 3 和 7 整除 D 不能被 7

! 选项:整数

! 7 除尽

! 考场就是整数

小红书: @贝栗子

余数型

【例4】(2025 全国事业单位)某厂购进一批染料,分别为红色和蓝色,该厂每天消耗红色染料 3 桶,蓝色染料 2 桶,7 天后检查发现剩余染料中红色是蓝色的 3 倍,问该厂共购进至少多少桶染料?

A. 36

B. 37

C. 39

D. 43

7 天消耗 总数-35 桶 = 剩下的 $\frac{\text{红}}{\text{蓝}} = \frac{3}{1} \Rightarrow$ 说明剩下是 4 的倍数

39-35 = 4 < 3

! 至少——不可能 D

比例型

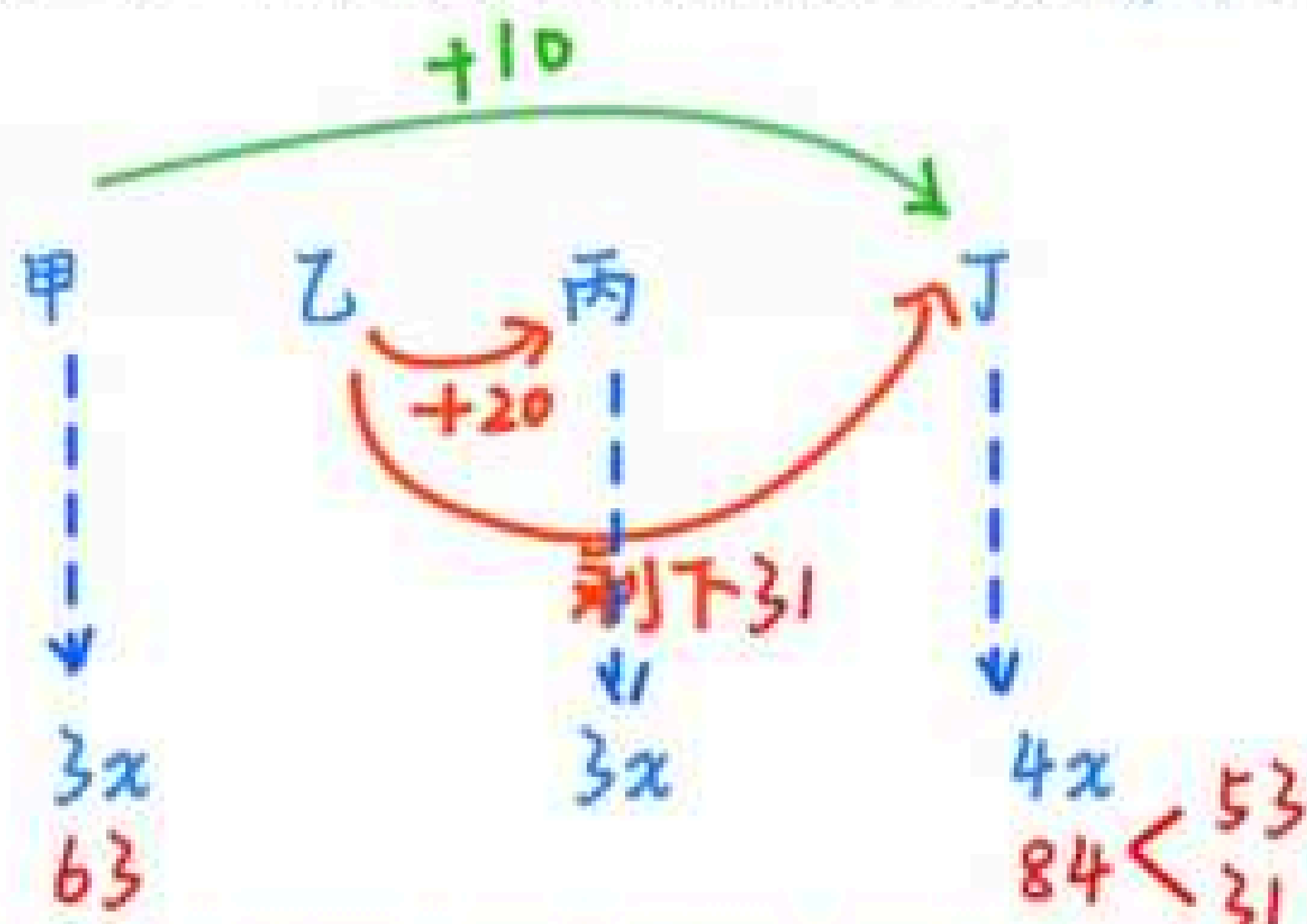
【例7】(2025 国考)甲、乙、丙、丁四个部门共有 210 名员工,且甲部门员工数比丁部门多 10 人。现乙部门调动 20 名员工到丙部门且其剩余员工并入丁部门后,甲、丙、丁三个部门的员工数之比为 3:3:4。问原乙部门有多少名员工?

A. 41

B. 46

C. 51

D. 56



原来乙 = 20 + 剩下(D)

= 20 + 31 = 51 —— C

四、倍数特性之增长率型

用资料解决数量

- (1) 分析关系: 基期、现期、增长量、增长率
- (2) 结合选项, 做猜结合



【例9】(2025 江苏)某市正在深入推进“智改数转网联”升级行动计划,力争实现全市

规模以上企业全覆盖。目前,全市规模以上企业 2080 家,其中未完成升级的规模以上企业比已

完成升级的多 0.6 倍,那么已完成升级的规模以上企业有()。

A. 780 家

B. 800 家

C. 1280 家

D. 1300 家

! 增长率

共 13 份 = 2080

未完成 = 8 = 1.6
已完成 = 5 = 1

1 份 = 2080 ÷ 13 = 160

160 × 5 = 800

五、倍数特性之 $A=B \times C$

方法：赋值

公倍数求法：短除法

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 18 \quad 30} \\ 2 \overline{) 6 \quad 10} \\ 3 \quad 5 \\ 3 \times 2 \times 1 \times 5 = 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 30 \quad 50} \\ 3 \overline{) 9 \quad 15 \quad 25} \\ 5 \overline{) 3 \quad 5 \quad 25} \\ 3 \quad 1 \quad 5 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 1 \times 5 = 450 \end{array}$$

【例 12】(2025 联考) 某小区组织“情满金秋”柑橘采摘活动，参加人员按年龄分成老、中、青三组，老年组、中年组的人数之比为 5:2，中年组、青年组的人数之比为 3:4。老年组、中年组、青年组平均每人采摘速度之比为 1:2:3。已知青年组共采摘 80 斤柑橘，那么三组人员一共采摘柑橘：

A. 170 斤

B. 212 斤

C. 255 斤

D. 298 斤

$$\begin{array}{ccc} \text{老} & \text{中} & \text{青} \\ 5 & : & 2 \\ & 3 & : 4 \\ \hline 15 & : & 6 : 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{老} \quad 15x \\ \text{中} \quad 6x \\ \text{青} \quad 8x \end{array}$$



来源于小红书@贝栗子

$$\begin{array}{l} 15xu \\ 12xy \\ 24xu \\ \hline \text{共 } 51xu \end{array}$$

代入即可

解得 $xy = \frac{10}{3}$

小红书@贝栗子

六、已知 $X+Y, X-Y$, 求 X, Y

$$\begin{cases} X+Y=\text{大} \\ X-Y=\text{小} \end{cases} \quad \text{则有 } X = \frac{\text{大}+\text{小}}{2} \quad Y = \frac{\text{大}-\text{小}}{2}$$



来源于小红书@贝栗子

【练习 11】(2024 江苏) 某居民楼居住人数介于 90 和 110 之间，其中 50 岁及以上居民占

$\frac{1}{12}$ ，女性占 $\frac{7}{16}$ 。若该居民楼 30 岁及以上居民比 30 岁以下居民多 20 人，则 30 岁以下居民比

50 岁及以上居民多：

A. 30 人

B. 27 人

C. 23 人

D. 20 人

公倍数是 48——总人数在 90—110 之间

所以总人数 = 96 人

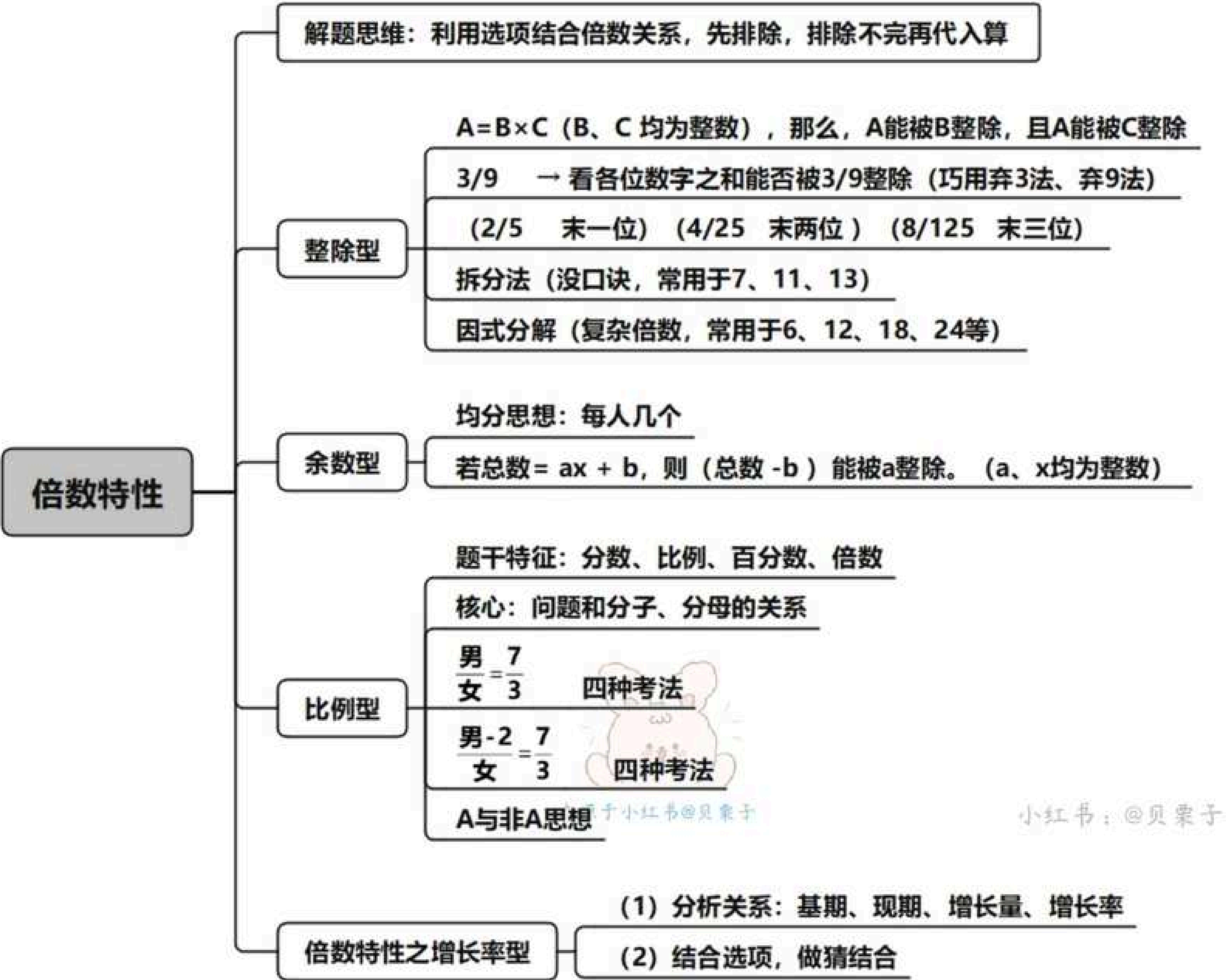
50 岁以上 = 8 人

所以 38 - 8 = 30 人

$$\begin{cases} x+y=96 \\ x-y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=58 \\ y=38 \end{cases} \rightarrow 30 \text{ 岁以下}$$

$$\begin{array}{l} A+B=\text{大} \quad A=\frac{\text{大}+\text{小}}{2} \\ A-B=\text{小} \quad B=\frac{\text{大}-\text{小}}{2} \end{array}$$

思维导图



第二章 方程问题

一、普通方程

- 设一个未知数 (x)
- 设未知数技巧
 - 设小不设大 eg: 甲是乙的两倍
 - 出现比例设份数 eg: 甲: 乙=3:5
 - 设中间量 eg: 甲: 乙=3:1, 乙: 丙=2:3

二、普通方程组

- 存在多个未知数, 设 x 、 y 、 z , 抓住问题消元求解
- 记住: 问题求谁, 就保留谁, 把剩下的消元

三、不定方程

- $ax+by=M$
 - ① 奇偶特性 奇+偶=奇 奇+奇=偶 偶+偶=偶
 - ② 倍数特性 $ax+by=M$, 当 a 或 b 与 M 有公因子时, 考虑倍数特性。
 - ③ 尾数法 0的尾数: 0; 5的尾数: 0和5
 - ④ 代入
- $ax+by+cz=M$
 - 方法: 倍数特性
 - ④ 代入

四、不定方程组

- 整数型
 - 两个方程, 三个未知数
 - 考法: 未知数一定是整数
 - 方法: 先消元转化为不定方程, 再按不定方程求解
- 非整数型
 - 考法: 未知数可以是小数 (单价和时间)
 - 赋零法: 赋其中1个未知数为零, 快速计算出其他未知数
 - 赋最大的数, 不好算的数
 - 凑系数--- (不好想)



来源于小红书@贝栗子

不得以任何形式搬运本人笔记, 盗图必究!

普通方程

【例1】(2025 广东)某服务大厅设有若干个服务窗口,其中1个是快捷服务窗口,某日服务窗口的平均业务量为29单,其中快捷服务窗口的业务量为41单,其余窗口的平均业务量为28单,则服务大厅共有()个窗口。

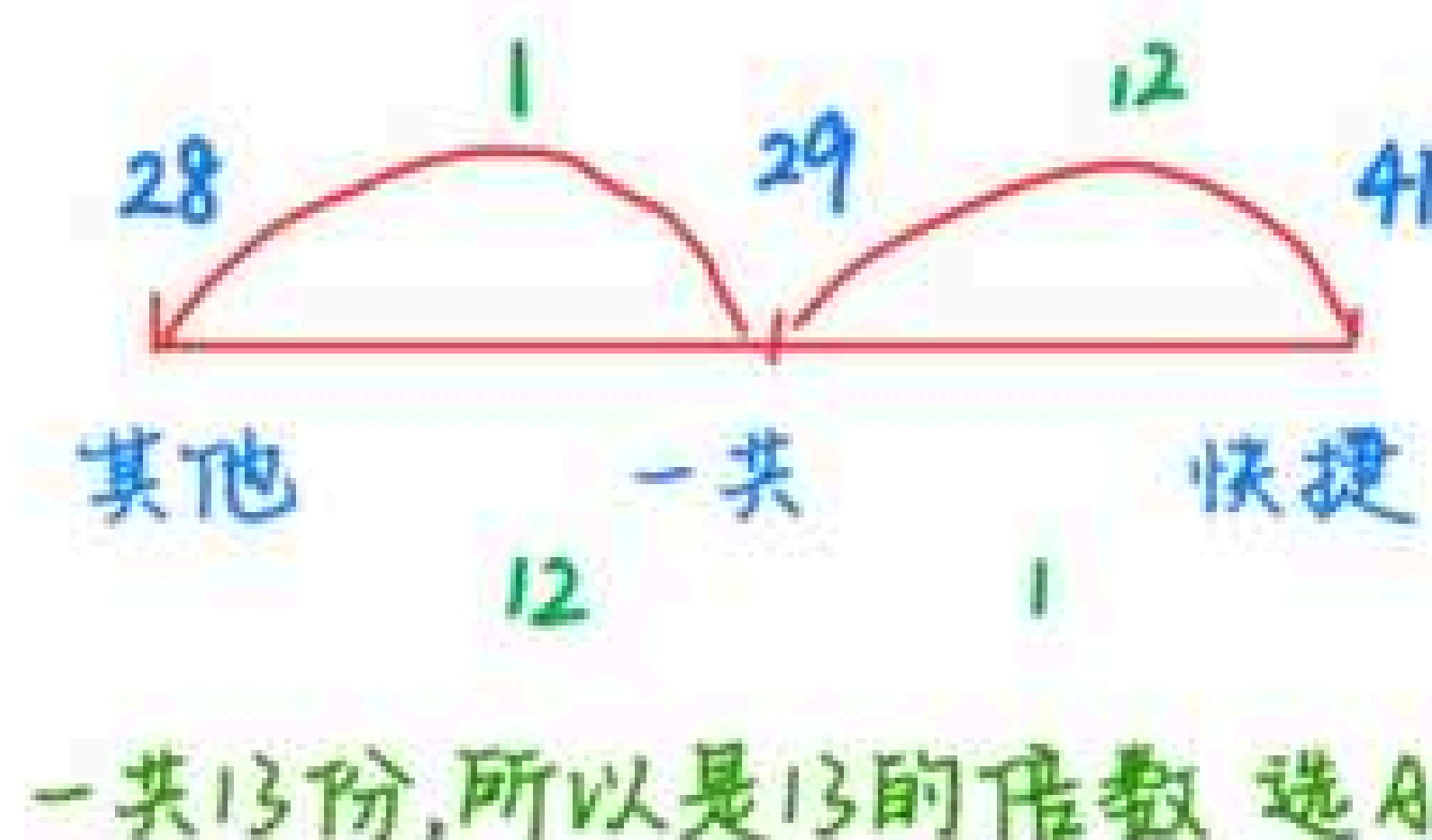
A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

$\begin{matrix} & A & \text{非}A \\ \text{快捷} & & \text{其他} \\ \text{1个} & & (x-1)\text{个} \\ 29x = 41 + & & (x-1) \cdot 28 \\ \text{得} x = 13 \end{matrix}$



普通方程组-三元

【例6】(2023 联考)浮雕银杯是我国古代常见的一种盛酒容器,有大银杯和小银杯之分。已知5个大银杯加1个小银杯,可以盛酒3斛(斛,是古代的一种容量单位),5个小银杯加1个大银杯,可以盛酒2斛,则1斛酒至多可以倒满小银杯的数量为:

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

大	小	斛
x	y	z

根据题意列方程即可

$$\begin{cases} 5x+y=3z \text{ ①} \\ x+5y=2z \text{ ②} \end{cases} \quad \text{②} \times 5 - \text{①} \rightarrow 24y=7z \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

不定方程

【例7】(2025 联考)甲乙两部门组织户外团建,共设A、B、C三项活动。甲部门每人三项活动均参加1次,乙部门每人任选2项不同活动各参加1次。已知A、B、C三项活动分别有18人、16人、15人参加,问甲部门成员至多有多少人? **! 人次和人的区别**

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

甲部门1人参加3次活动 设 x 人
 乙部门1人参加2次活动 设 y 人

$$3x + 2y = 49$$

奇 偶 奇

可知BD $\times$ 剩下代入
代入 $x=13$ 则 $y=5$ 符合

不定方程组

【例11】(2024 联考)商店销售甲、乙、丙、丁四种商品,每件分别盈利15元、9元、4元和1元。某日销售这四种商品共40件,共盈利201元。四种商品每种至少销售1件,且甲、丁商品销量相同。问当天丙商品的销量为多少件?

A. 21

B. 27

C. 29

D. 31

$\downarrow$
 $\text{甲} = \text{丁} = x$

甲	乙	丙	丁
x	y	z	x

消 x 或者消 y (因为求 z)

$$\text{①} \times 8 - \text{②}: -y + 4z = 119$$

$$\text{得} 4z = 120$$

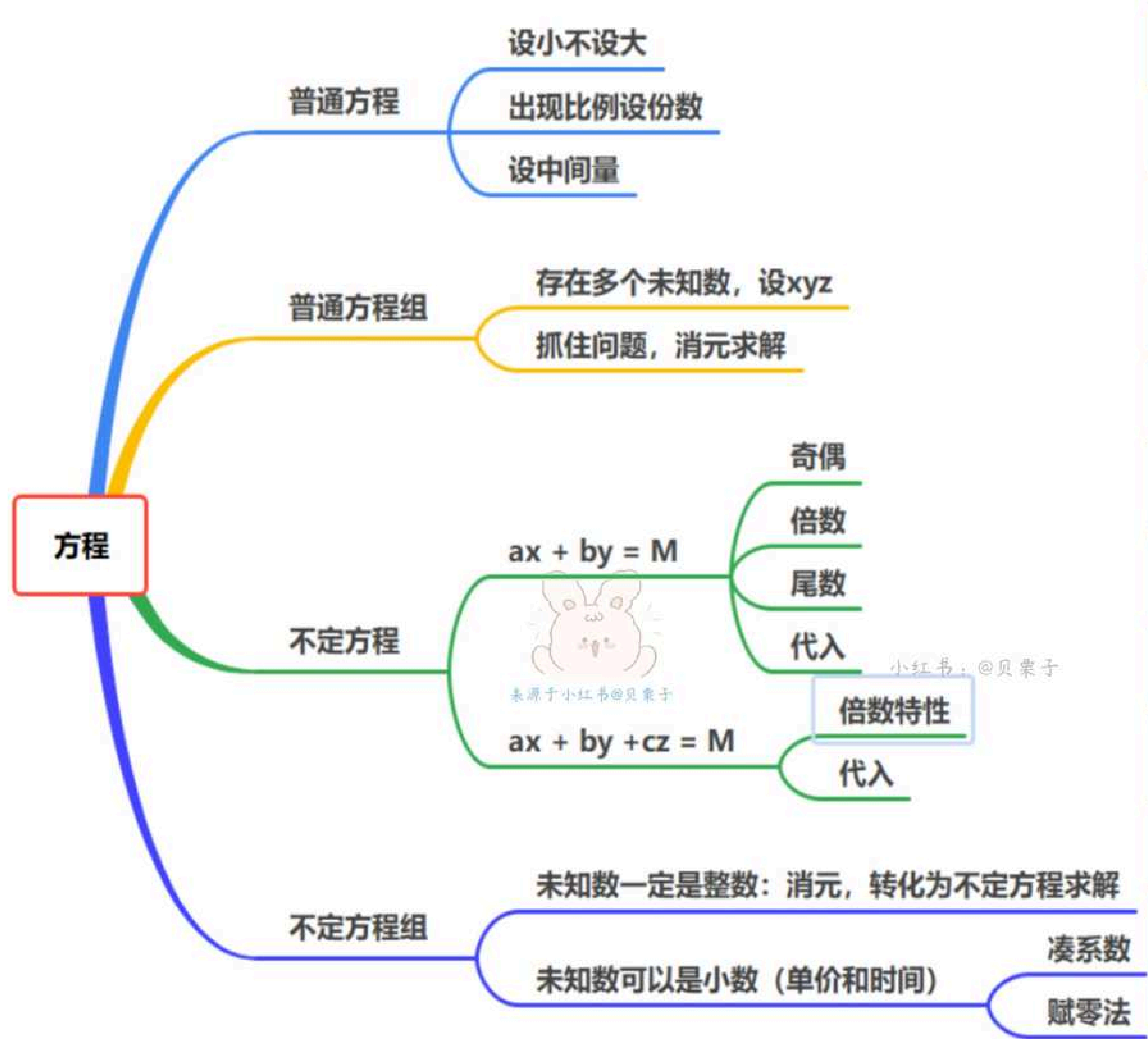
所以 $z \geq 30$ 选D

$$\begin{cases} 2x + y + z = 40 \text{ ①} \\ 16x + 9y + 4z = 201 \text{ ②} \end{cases}$$



来源于小红书@贝栗子

思维导图



第三章 周期问题

一、周期余数

出现循环或周期，问？个，往往数据很多/数字很大，找规律

方法：
找周期：确定周期的起点和长度
算余数：总数 $\div$ 周期长度 = 多个周期...余数 (n)
做等价：第 n 个：余几数几（无余数，周期最后一个）

二、周期相遇

出现多个小周期，求再次相遇

最小公倍数相遇
 (A每3天锻炼一次，B每4天锻炼一次--12天相遇)
 (A每隔3天锻炼一次，B每隔4天锻炼一次---20天相遇)

每隔 n 天 = 每 n+1 天

分数的最小公倍数
 (1)分母通分
 (2)求分子最小公倍数
 (3)分子最小公倍数 $\div$ 分母

小红书：@贝栗子

平闰年判定

过一个平年星期数+1，过一个闰年星期数+2

闰年：年份被4整除---2月有29天
 （整百的年份需要被400整除，如2100年）

注：可以简记为 52 周零 1 天（闰年零 2 天）

月份问题

大月31天：(1、3、5、7、8、10、12)

小月30天：(4、6、9、11) 2月28(29)天

注意：“一个自然月内最多有...”应将这个自然月按照大月31天计算。

每个月必有4周，取连续28天

三、星期日期问题

连续的天

给出一段时间内有若干个周几，推算某一天为周几

常用结论
 ①每连续7天，必有周一到周日各1天
 ②每连续28天，必有周一到周日各4天

常用于推月初、月底或者某一天星期几

技巧：前=后

12 生肖

子鼠、丑牛、寅虎、卯兔、辰龙、巳蛇、午马、未羊、申猴、酉鸡、戌狗、亥猪

【例1】(2019 河北)某新建高速公路中间隔离带绿化时,顺次种植2株蜀桧、3株刺柏、5株小叶女贞、3株大叶黄杨,按此循环,第2019株树木是什么?

周期余数

- A. 蜀桧
B. 刺柏
C. 小叶女贞
D. 大叶黄杨

$$\text{周期} = 2 + 3 + 5 + 3 = 13$$

$$2019 \div 13 = 155 \dots 4 \text{棵}$$

小红书: @贝栗子

【例5】(2019 河北)甲、乙、丙三人均每隔一定时间去一次健身房锻炼。甲每隔2天去一次,乙每隔4天去一次,丙每7天去一次。4月10日三人相遇,下一次相遇是哪天?

- A. 5月28日
B. 6月5日
C. 7月24日
D. 7月25日

周期相遇

$$\text{每隔} n \text{天} = \text{每} n+1 \text{天}$$

$$\text{所以公倍数是 } 3 \times 5 \times 7 = 105 \text{天}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 4\text{月} & 5\text{月} & 6\text{月} & 7\text{月} & & \\ 4\text{月}10\text{日} & +20 & +31 & +30 & +24 & = & 105 \end{array}$$

【例8】(2025 国考)小张每周一到周四夜跑,周五到周日休息,已知某年2月他夜跑17次,3月夜跑19次,问4月他夜跑多少次?

星期问题

小红书: @贝栗子

$$4\text{月}: 30\text{天} \div 7 = 4\text{周} \dots 2\text{天}$$

①出现2月说明考的是28或者29天
②出现多个月份,整体分析更加简单。

- A. 16
B. 17
C. 18
D. 19

一周7天跑4次

$$28 \div 7 = 4\text{周} \times 4 = 16\text{次}$$

$$29 \div 7 = 4\text{周} \dots 1\text{次} \quad 16 + 1 = 17\text{次} \checkmark$$

$$\text{所以2月是29天} \quad 2\text{月} + 3\text{月} = 60\text{天} \div 7 = 8\text{周} \dots 4 \quad \text{共跑 } 17 + 19 = 36\text{次}$$

$$8\text{周} \times 4 = 32\text{天} \quad \text{所以剩下4天都要跑(只能是一二三四)} \quad 4\text{月}4\text{周跑}16\text{次}$$

【例13】(2022 联考)2021年7月1日是中国共产党建党100周年的纪念日,这一天是星期四,那么建党110周年纪念日:

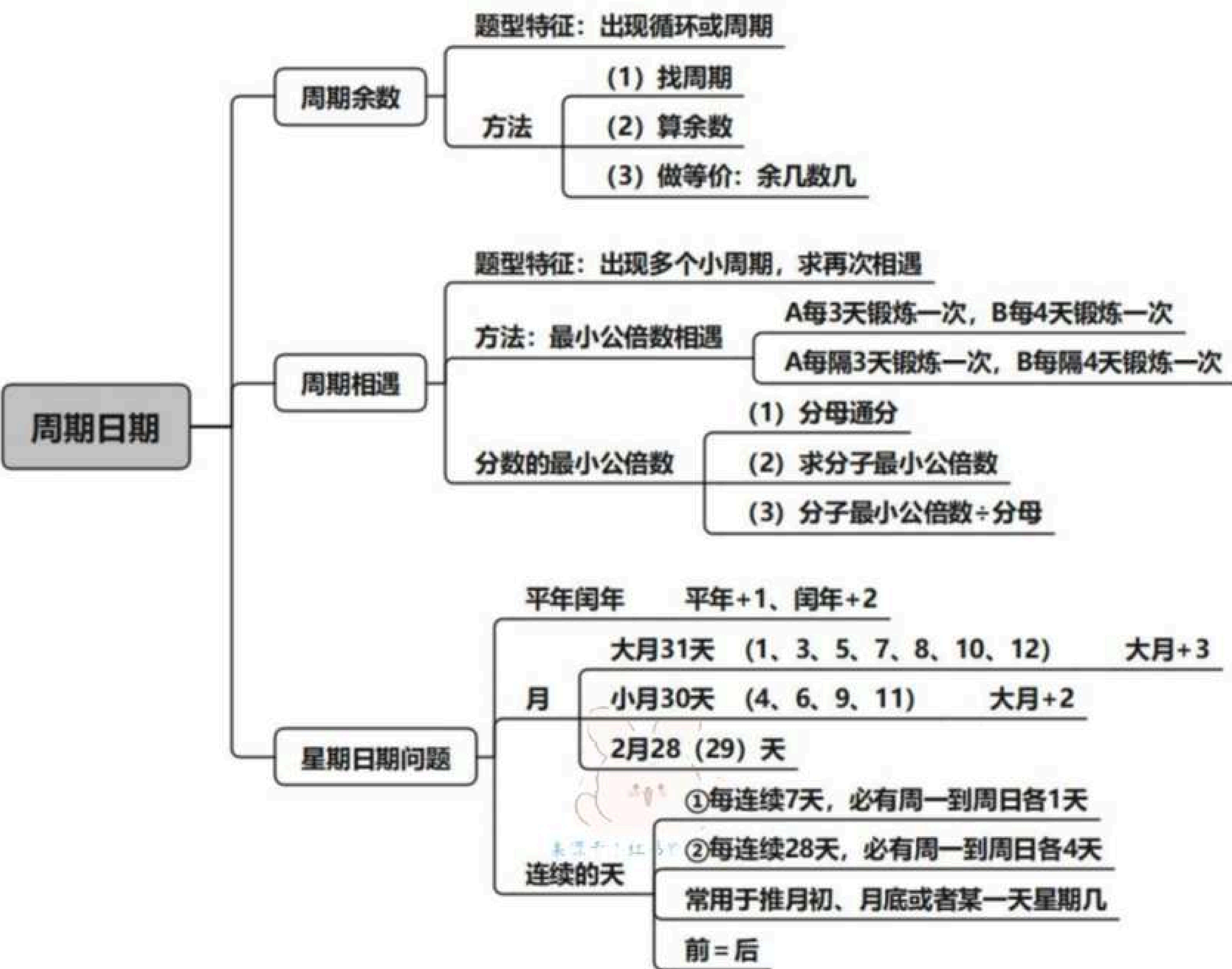
- A. 星期一
B. 星期二
C. 星期三
D. 星期四

2031年7月1日

$$10\text{年} \begin{cases} \text{平年 } 8\text{年} + 1 \text{ ————— } + 8 \\ \text{闰年 } 2\text{年} + 2 \text{ ————— } + 4 \end{cases} + 12 = 7 + 5 (1\text{周} + 5\text{天})$$

2024 2028

当天是周四 + 5天就是
周五六日一二



第四章 工程问题

具体单位型

有具体的效率或者总量

方法：列方程，根据问题求

完工时间型

题型特征 多个主体的完工时间

考法

- 普通完工型
 - 赋值总量（求公倍数）
 - 求效率
 - 列表或列方程求解
- 完工时间型变形（代入思维）
- 工程费用（费用最少，便宜的先干）
- 周期循环工程
- 多个工程完工（方法：列多个工程）

注意：效率统一化

给效率比例型

- 直接给：甲:乙=3:4；甲的效率是乙的2.5倍；甲的效率比乙高25%
- 间接给：工作量相等，以工作量推效率关系（左右相消更快）
- 给具体人数或机器数：
 - 50个工人修路，80台挖掘机
 - （赋值每个人/每台机器效率为1或n）

统筹工程问题

--擅长的人干擅长的事情

来源于小红书@贝栗子

小红书：@贝栗子

工程图形问题

--抓住横轴和纵轴关系，排除法做题

牛吃草型

公式： $y = (N - X) \times T$

变形考法

- 变形1：牛羊吃草，转换为羊（或牛）单独吃草
- 变形2：给单个牛的效率，效率就是 $n \times$ 效率
- 变形3：氧气瓶漏气、草枯萎 $y = (n + X) T$
- 变形4：牛更能吃了，牛的效率变化

常考：牛吃草、资源消耗类、窗口服务、排队问题

具体单位型

有具体的效率或者总量
方法：列方程，根据问题求

【例2】（2025 联考）某单位接到一项任务，探访所在辖区的商户了解相关信息。原计划由 5 人 10 天完成探访 200 家商户工作任务，工作 5 天后，由于工作调整，需要增加探访辖区的 300 家商户。假定所有人工作效率相同，若仍要求在原计划时间之内完成，则需要增加的人数为：

A. 10 人

B. 15 人

C. 20 人

D. 25 人

$$\text{人} \times \text{时间} \times \text{效率} = \text{工作量}$$

$$5 \text{人} \times 10 \text{天} \times ?? = 200$$

$$\text{效率} = \frac{200}{50} = 4 \text{家/天}$$

工作5天：即探访了 $5 \times 5 \times 4 = 100$ 户，剩下 100 户

再增加 300 户： $100 + 300 = 400$ 户（效率还是一样）

$$\text{工作量} = \text{效率} \times \text{时间} \times \text{人数}$$

$$400 = 4 \times 5 \times \text{人数}$$

$$\text{人数} = 20 \text{人}$$

所以增加 15 人

完工时间型

题型特征 多个主体的完工时间

考法

普通完工型

赋值总量（求公倍数）

求效率

列表或列方程求解

完工时间型变形（代入思维）

工程费用（费用最少，便宜的先干）

周期循环工程

多个工程完工（方法：列多个工程）

小红书：@贝栗子

【例3】（2024 联考）有一批零件，如果甲车间单独完成需要 50 小时，乙车间单独完成需要 30 小时。在甲车间单独完成若干小时后，由于要承担其他紧急任务，剩余的任务由乙车间继续完成，这样一共用了 42 小时。问乙车间完成的零件量占这批零件总量的：

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

$$W = P(\text{效率}) \times T(\text{时间})$$

甲	150	3	50
乙	150	5	30
甲	150	3	$x = 30$
乙		5	$42 - x = 12$

甲乙一起干 150

$$\text{总量} = P \times T = 3x + 5(42 - x) = 150$$

得 $x = 30$

$$\text{所以 } \frac{\text{乙完成}}{\text{总量}} = \frac{12 \times 5}{150} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

完工变形

间接表述方式

 $T_{甲} + T_{乙}$ $T_{(甲+乙)}$

【例4】(2025 浙江)一项任务,甲、乙分别单独完成的天数之和是合作完成天数的4.5

倍。任务开始后,甲、乙先合作12天,乙再单独工作12天,恰好完成。已知甲的效率比乙高,

那么甲单独完成这项任务需要多少天?

直接表述方式

A. 24

方法一:代入 代入A甲单独需要24天——即总量 = 24甲 = 12(甲+乙) + 24乙 $\Rightarrow \frac{甲}{乙} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$

总量 = 21甲 = 24 × 2 = 48

W	=	P	X	T
48		2		24
48		1		48
48		3		16

发现符合 $T_{甲} + T_{乙} = 4.5 T_{甲乙}$ A✓

小红书: @贝栗子

工程费用

【例6】(2021 江苏)为发展乡村旅游,某地需建设一条游览线路,甲工程队施工,工期①为60天,费用为144万元;若由乙工程队施工,工期②为40天,费用为158万元。为在旅游旺季到来前完工,工期不能超过30天,为此需要甲、乙两工程队合作施工,则完成此项工程的费用最少是:

用最少是:

A. 156 万元

B. 154 万元

C. 151 万元

D. 149 万元

$$\begin{aligned} \text{甲: } \frac{144\text{万}}{60\text{天}} &\approx 2.4\text{万/天} \\ \text{乙: } \frac{158\text{万}}{40\text{天}} &\approx 3.95\text{万/天} \end{aligned}$$

发现甲的费用最少,让他干多一些
让甲干满30天

甲30天	乙20天
$\frac{144}{2} = 72\text{万}$	$\frac{158}{2} = 79\text{万}$

小红书: @贝栗子

理解:甲自己做是60天144万,那做30天即一半就是72万(工程还剩一半)
乙自己做40天158万,甲做了一半,那剩下一半给乙做,乙做一半即20天79万

工程费用问题:
特征:有工期时间的限制
费用最小,让便宜的工作最久。

周期工程

【例7】(2021 年四川下)某项工程,甲、乙、丙三个工程队如单独施工,分别需要12小时、10小时和8小时完成。现按“甲—乙—丙—甲……”的顺序让三个工程队轮班,每队施工1小时后换班,问该工程完成时,甲工程队的施工时间共计:

A. 2 小时 54 分

B. 3 小时

C. 3 小时 54 分

D. 4 小时

赋值公倍数120

	W	=	P	X	T
甲	120		10		12
乙	120		12		10
丙	120		15		8

3h为一个周期

三个的总效率是 $10 + 12 + 15 = 37$

$$\frac{120}{37} = 3 \dots 9 \text{ 工作量}$$

周期 甲 < 1 小时
甲干了完整三小时

3小时多——选C

多个工程完工

【例8】(2022 联考) 甲、乙、丙三个工程队接到 A、B 两个工程的施工任务。若由甲单独完成 B 工程需要 30 天；若甲乙两队合作施工，则完成 A 工程需要 30 天，完成 B 工程需要 20 天；乙丙合作完成 A 工程则需要 24 天。现在三个工程队合作完成 A、B 两个工程，多少天可以完工？(不足 1 天按 1 天计算)

	A 工作			B 工作		
	$W = P \times T$			$W = P \times T$		
A. 24	甲乙: 90	3	30	甲: 60	2	30
B. 25	乙丙: 90	$\frac{15}{4}$	24	甲乙: 60	3	20
C. 26						
D. 27						

①说明A工程是B工程的1.5倍

②根据B工作的图可以赋值 $W = 60$ 可以求甲、乙的效率③根据1.5倍可以得A工作量 $W = 90$ 接着求出效率

$$\text{问题: } \frac{A+B}{\text{甲乙丙}} = \frac{60+90}{2+\frac{15}{4}} = 26^+ \rightarrow 27$$

小红书: @贝栗子

注意: 效率统一化

给效率比例型

1. 直接给: 甲:乙=3:4; 甲的效率是乙的 2.5 倍; 甲的效率比乙高 25%

2. 间接给: 工作量相等, 以工作量推效率关系 (左右相消更快)

3. 给具体人数或机器数: 50 个工人修路, 80 台挖掘机
(赋值每个人/每台机器效率为 1 或 n)

【例9】(2025 联考) 甲、乙、丙合作完成一项工程, 如甲 8 天、乙 6 天、丙 4 天依次工作刚好可完工。现甲、乙合作 6 天后, 剩下的工程丙恰好单独 5 天完工。已知甲的效率是乙的 1.5 倍, 问丙单独完成需要多少天?

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{3}{2}$$

A. 10

根据①②可以列式 $8\text{甲} + 6\text{乙} + 4\text{丙} = 6(\text{甲} + \text{乙}) + 5\text{丙}$

B. 15

$$8 \times 3 + 6 \times 2 + 4\text{丙} = 6 \times 5 + 5\text{丙}$$

C. 20

得丙效率 = 6 可得总工作量 = 60

所以丙单独做需要 $\frac{60}{6} = 10$ 天

D. 30

小红书: @贝栗子

统筹工程问题

--擅长的人干擅长的事情

【例12】(2025 国考) 某种机械由 3 个 A 模块和 2 个 B 模块组成。甲车间每天可生产 6 个 A 模块或 3 个 B 模块, 乙车间每天可生产 1 个 A 模块或 2 个 B 模块。现两车间合作生产 40 台该机械所需模块, 问至少需要多少天?

A. 24

	A	B
甲	6	3
乙	1	2

B. 26

C. 28

D. 30

通过右边分析可知甲做A, 乙做B

现在要做40台, 则需要 $3 \times 40 = 120$ 个A需要 $2 \times 40 = 80$ 个B

	W	P	T
甲	120	6	20
乙	80	2	40
甲乙	40	5	8

20天同时干, 乙指干了40, 剩下的一起干, 所以是28天

①绝对性: (人的角度)

通过题干可以知道甲擅长A模块, 乙擅长B

——甲A乙B

②相对性: (AB的角度)

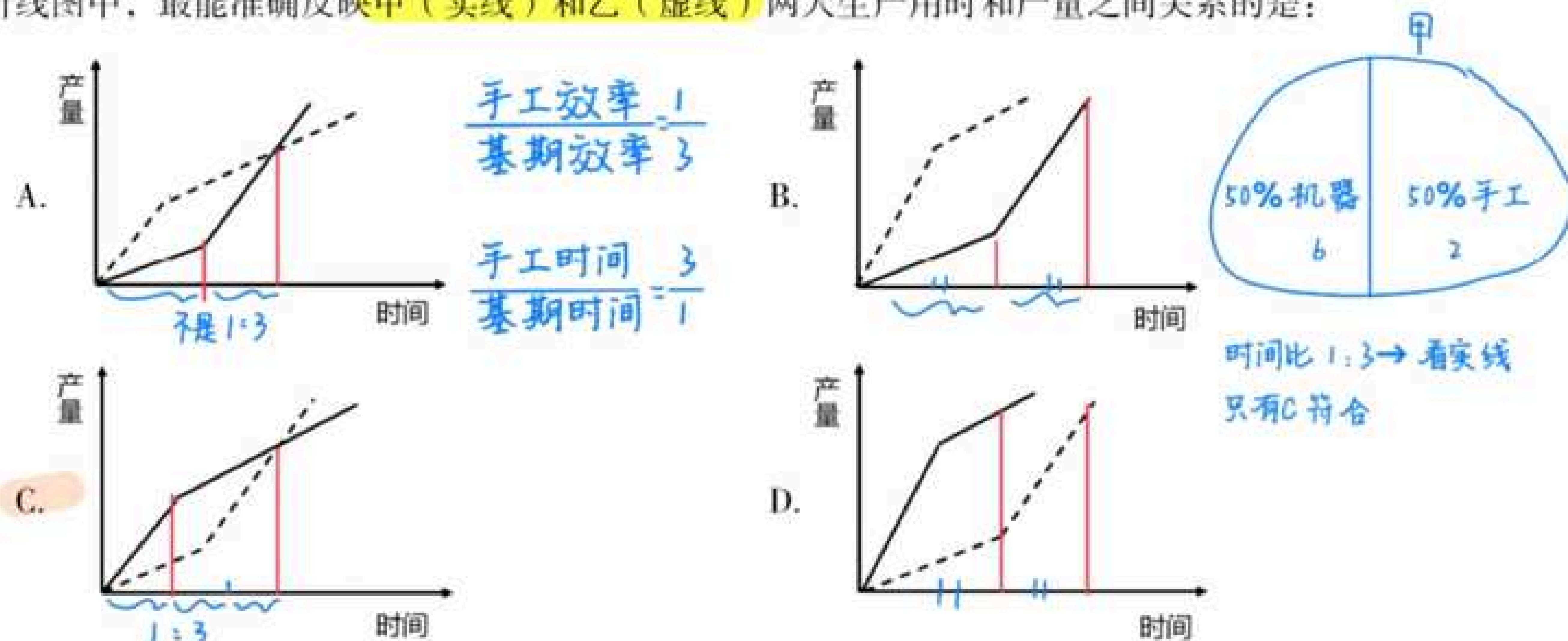
$$A: \frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{6}{1} = 6\text{倍}$$

$$B: \frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{3}{2} = 1.5\text{倍}$$

工程图形问题

--抓住横轴和纵轴关系,排除法做题

【例 13】(2025 浙江)甲、乙两名工人同时开始生产相同数量的零件,两人手工生产的效率都是 2 个/小时,用机器生产的效率都是 6 个/小时。已知甲先用机器生产任务总量的一半,然后换手工生产直至完成;乙先手工生产 1 小时,然后再用机器生产 1 小时,正好完成任务。问以下折线图中,最能准确反映甲(实线)和乙(虚线)两人生产用时和产量之间关系的是:



小红书: @贝栗子

公式: $y = (N - X) \times T$

牛吃草型

变形考法

变形 1: 牛羊吃草, 转换为羊(或牛)单独吃草

变形 2: 给单个牛的效率, 效率就是 $n \times$ 效率变形 3: 氧气瓶漏气、草枯萎 $y = (n + X) T$

变形 4: 牛更能吃了, 牛的效率变化

常考: 牛吃草、资源消耗类、窗口服务、排队问题

变形 1 【例 15】(2023 广东)某牧场的草, 匀速生长。如果 20 头牛来吃, 20 天可将草吃光; 如果 10 头牛和 10 只羊来吃, 30 天可以恰好吃光。已知一头牛每天的吃草量是一只羊的 2 倍, 则 30 只羊吃该牧场的草, 多少天可以吃光?

小红书: @贝栗子

A. 10

B. 20

C. 30

D. 40

方法一: 根据题意设原来总量 y , 每天生长 x
根据①知道每天吃草量 1, 为 2
则 $y = (40 - x) \times 20 = (30 - x) \times 30$
得 $x = 10$ $y = 600$
所以 30 只: $600 = (30 - 10) \times t$ 得 $t = 30$ 天

方法二: 理解

因为一头牛每天吃草的量是一只羊的两倍,
则 10 头牛和 10 只羊吃草的量 $= 10 \times 2 + 10 = 30$
头羊吃草的量
所以 30 只羊应该吃草, 30 天吃完。

变形2【例16】（2023 福建事业单位）某科技馆开门前已有 360 名游客在排队等待。假设开门后每分钟来的游客人数是一样的，一个入口每分钟可以进 12 名游客。如果同时开放 3 个入口，需要 30 分钟才没有人排队。现要使得开门 15 分钟后就没有人排队，至少需要同时开放（ ）个入口。

⚠ 给单个入口的效率，效率就是 $n \times$ 效率

A. 4

$$360 = (12 \times 3 - x) \times 30$$

B. 5

$$\text{得 } x = 24$$

小红书：@贝栗子

C. 6

$$\text{开门15分钟：} 360 = (12N - 24) \times 15$$

D. 7

$$\text{得 } N = 4$$

变形3【例17】（2024 联考）某农产品基地对外供应一批农副产品。假设这批农副产品每天都有定量的自然损耗，如果提货方每天运走 1.5 吨产品，则 50 天运完；如果提货方每天运走 2 吨产品，则 40 天运完。那么这批农副产品有多少吨？

A. 75

⚠ 氧气瓶漏气 草枯萎 $y = (n + x) T$

B. 80

根据题意列等式

C. 100

$$y = (1.5x + x) \times 50 = (2 + x) \times 40$$

D. 110

$$\text{得 } x = 0.5 \quad y = 100$$

小红书：@贝栗子

变形4【例18】（2022 江苏）某疫苗接种点市民正在有序排队等候接种。假设之后每小时新增前来接种疫苗的市民人数相同，且每个接种台的效率相同，经测算：若开 8 个接种台，6 小时后不再有人排队；若开 12 个接种台，3 小时后不再有人排队。如果每小时新增的市民人数比假设的多 25%，那么为保证 2 小时后不再有人排队，需开接种台的数量至少为：

A. 14 个

根据题目列等式

B. 15 个

$$y = (8 - x) \times 6 = (12 - x) \times 3$$

C. 16 个

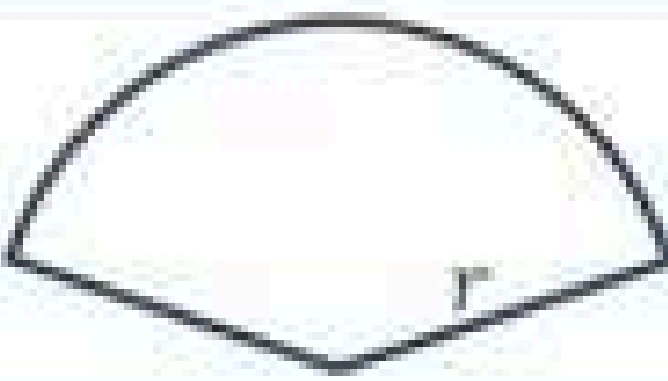
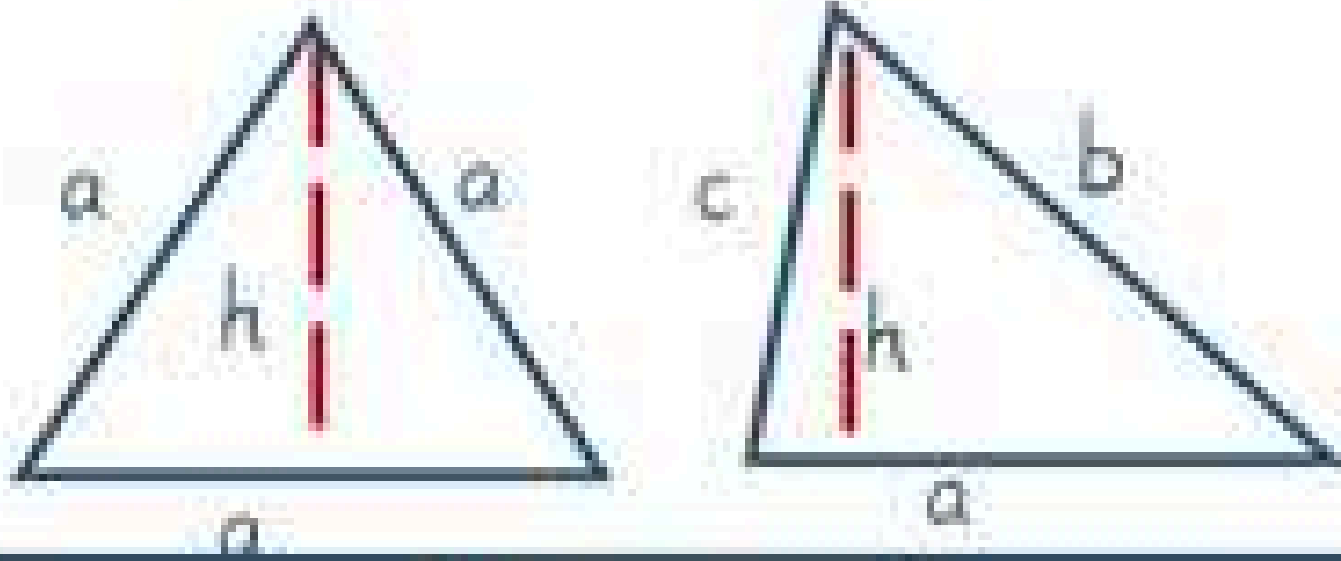
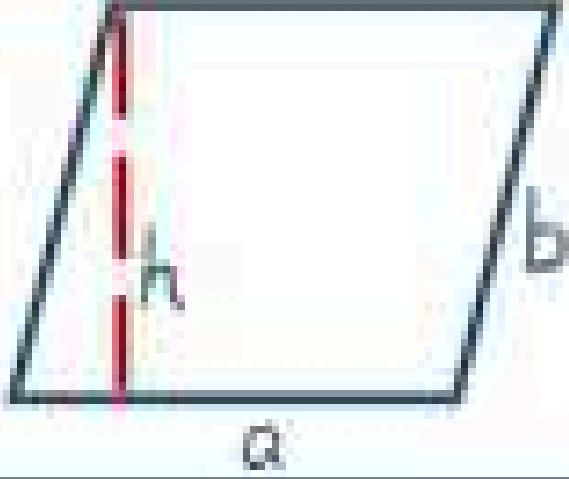
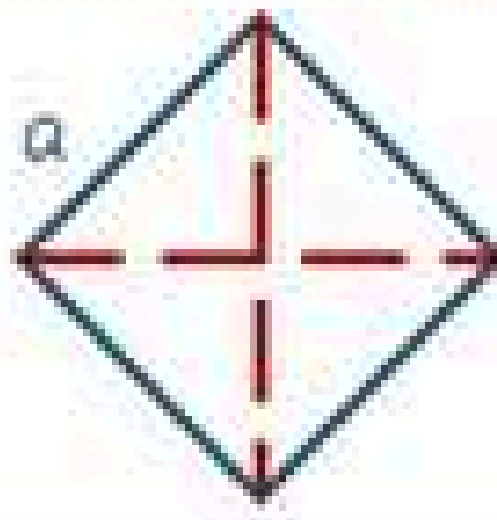
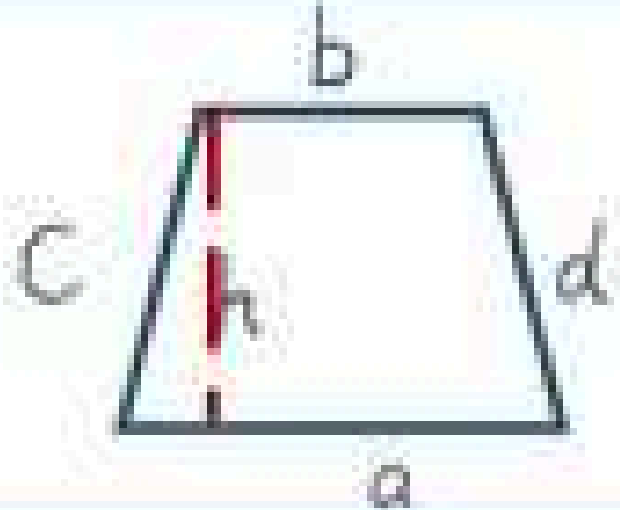
$$\text{得 } x = 4 \quad \text{因为多25\% 即 } x = 5$$

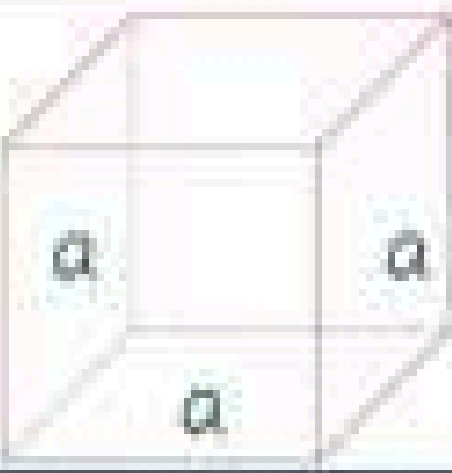
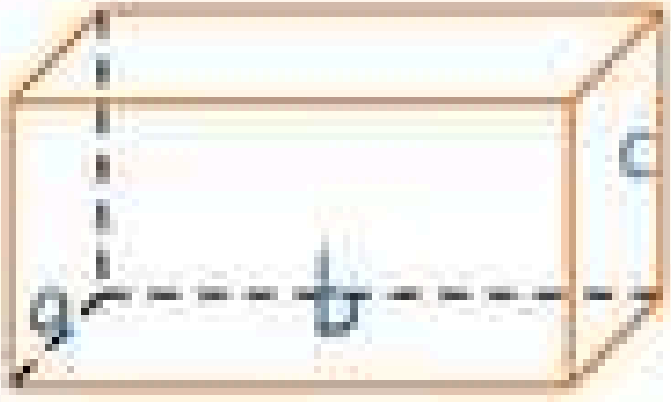
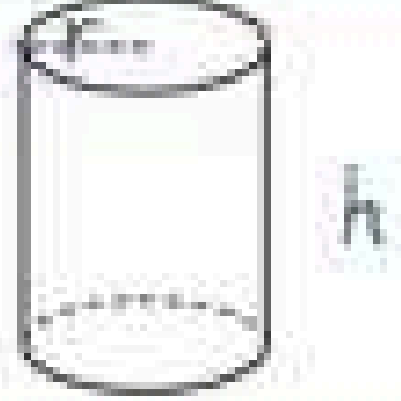
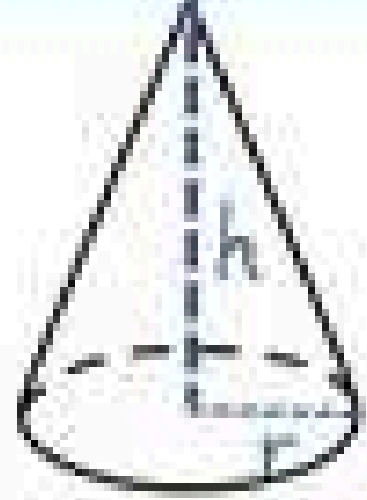
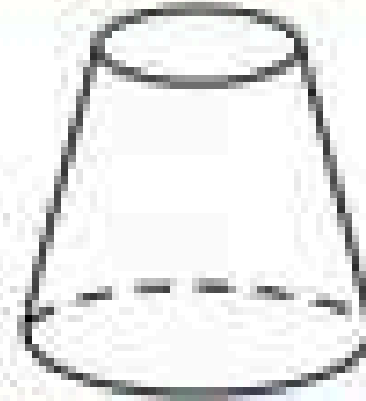
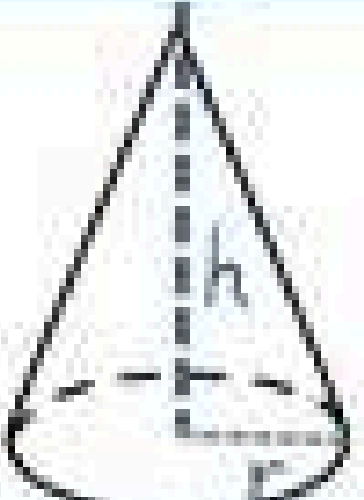
D. 17 个

$$\text{所以 } y = 24 = (N - 5) \times 2 \rightarrow N = 17$$



第五章 几何问题

平面图	图示	周长	面积
正方形		$4a$	a^2
长方形		$2(a+b)$	ab
圆形		$2\pi r$	πr^2
扇形		弧长 $=\frac{n}{360^\circ}2\pi r$ 弧长 $+2r$	扇形 $=\frac{n}{360^\circ}\pi r^2$
三角形		$a+b+c$	$\frac{1}{2}ah$
平行四边形		$2(a+b)$	ah
菱形		$4a$	$\frac{1}{2}$ 对角线乘积
梯形		$a+b+c+d$	$\frac{1}{2}(a+b)h$

立体图	图示	表面积	体积
正方体		$6a^2$	a^3
长方体		$2(ab+bc+ac)$	abc
球体		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圆柱体		$2\pi r^2+2\pi rh$	$Sh=\pi r^2h$
圆锥		$\pi r^2+\pi rl$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
侧面积	 圆台侧面积 $=\pi(r_1+r_2)l$  锥体侧面积 $=\pi rl$		

普通三角形： [两边之和大于第三边
两边之差小于第三边]

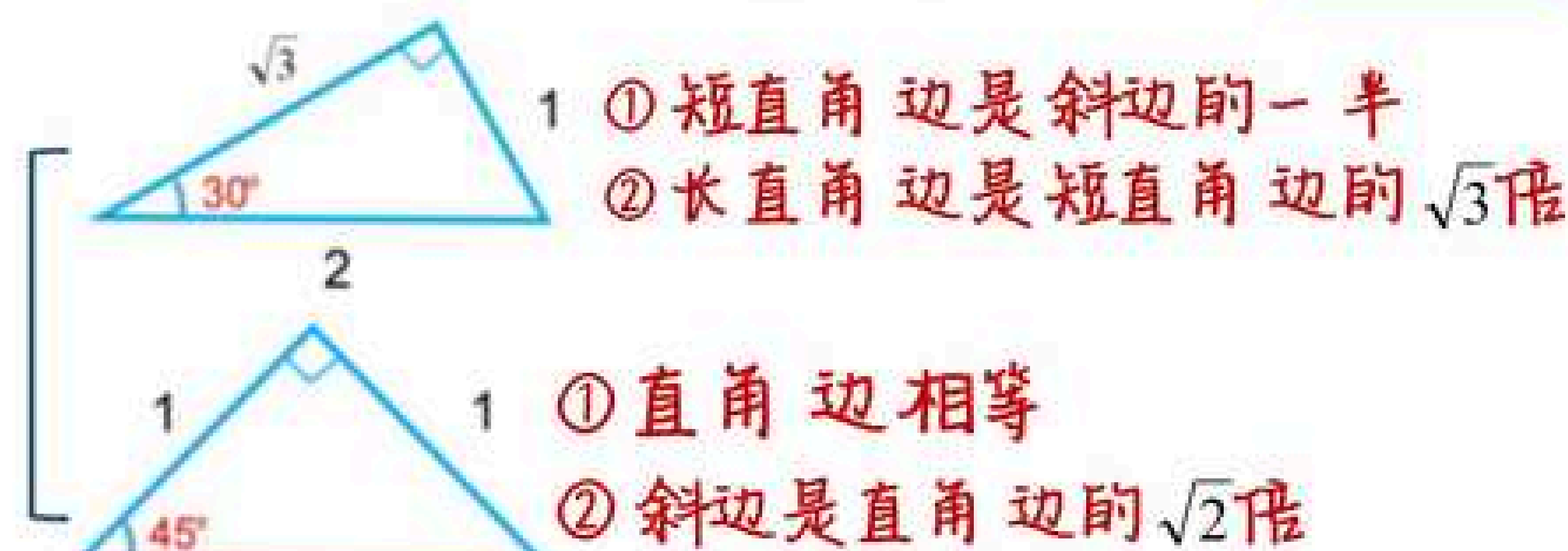
小红书：@贝栗子

常考根号： $\sqrt{2} = 1.414$ $\sqrt{3} = 1.732$ $\sqrt{5} = 2.236$

特殊勾股数： (3,4,5)、(6,8,10)、(5,12,13)、(7,24,25)

边长的放缩： 出现平方加和的条件，直接想勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$

直角三角形 特殊角三边关系



圆中的直角

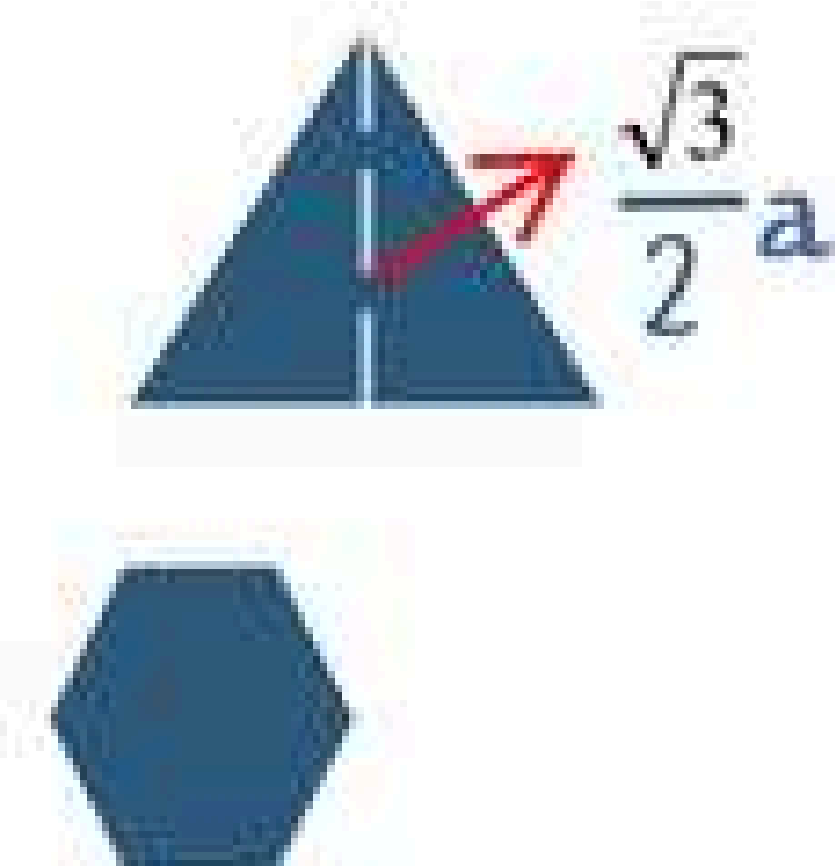
- [① 不在同一直线上的三个点确定一个圆
② 圆的直径所对的角是直角 (90°)]



等边三角形

边长: a 高: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 面积: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正六边形 由 6 个等边三角形构成



三角形同底或者同高

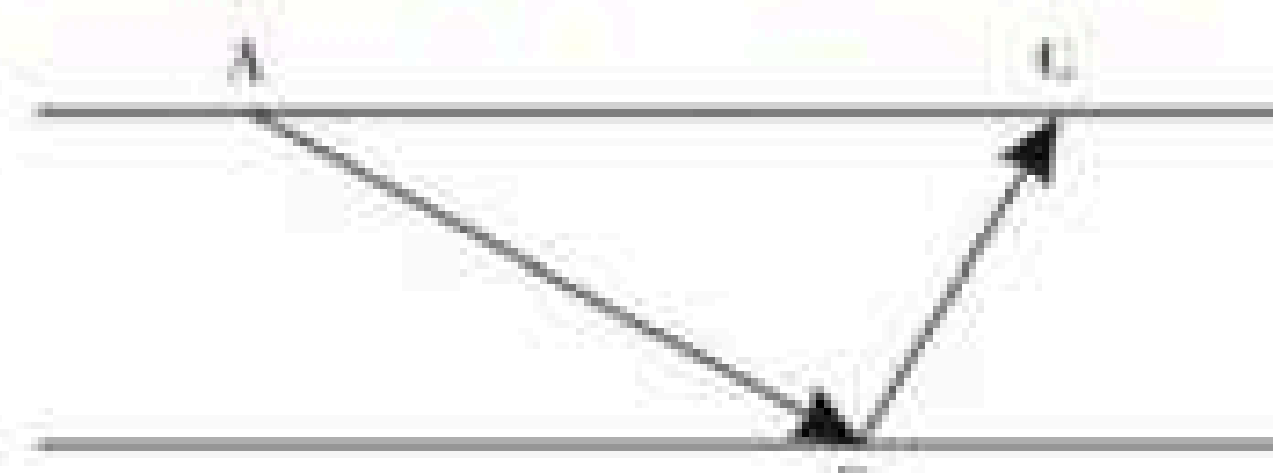
考法：多个面积

方法：底相同，面积之比等于高之比

小红书：@贝栗子

相似三角形

对应边成比例



(1) 直角三角形

【例5】(2025 浙江) 一块直角梯形空地 ABCD 如图所示，其中 $AD=AC=2AB$ 。现准备在图中三角形区域 ABC 建设特色生态园，并在图中与两条边相切的圆形区域建设特色花坛。已知 D 点到圆上任一点最短距离为 AB 长度的一半，那么特色生态园与特色花坛的面积比值在以下哪个范围？

D 到圆心连线与圆上的交点 E

即 DE 最短

$$DE = \frac{1}{2} AB = 1$$

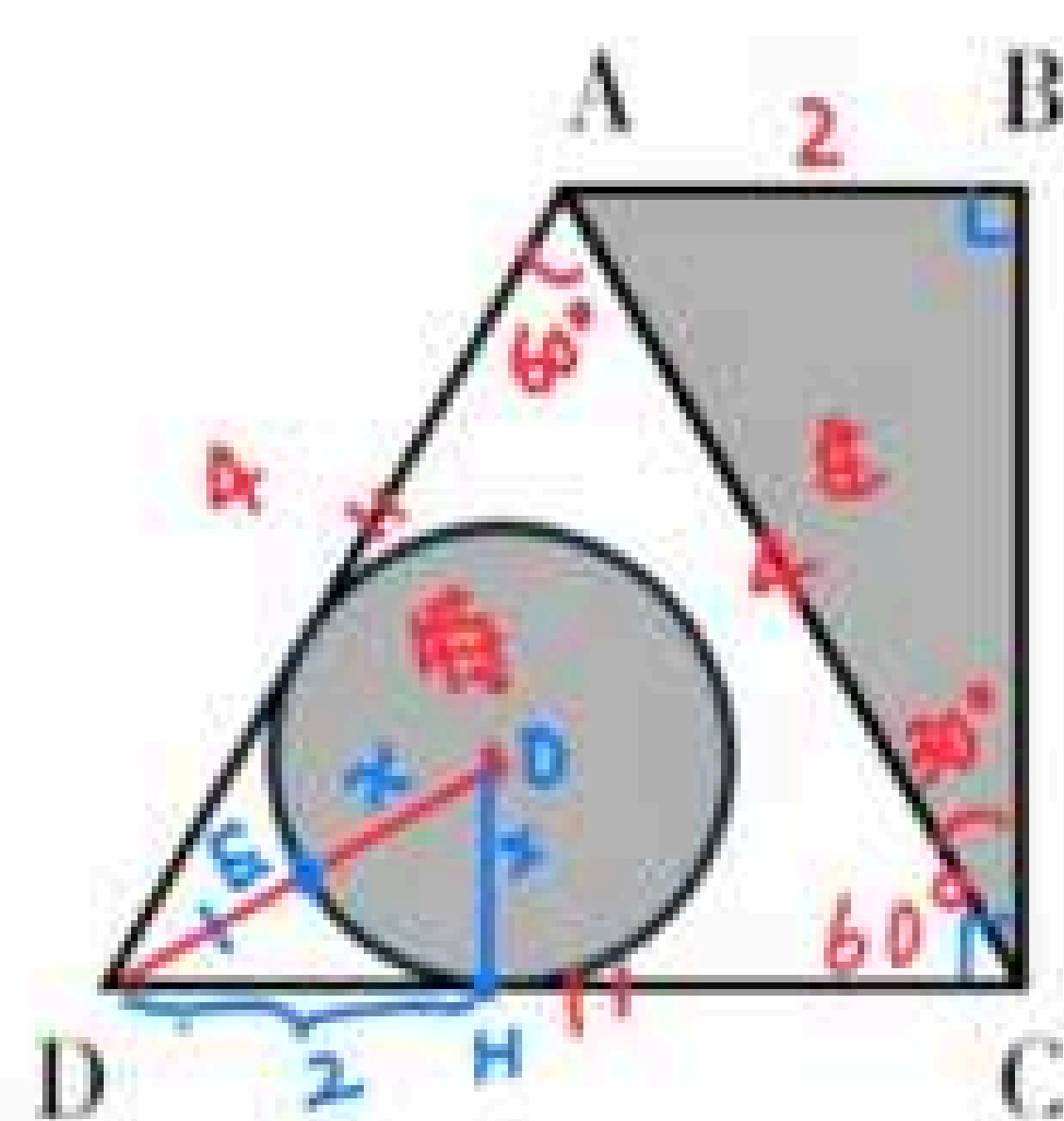
设圆半径 x

根据直角 $\triangle DOH$,

$$\angle ODH = 30^\circ$$

$$\text{所以 } (1+x) = 2x$$

$$\text{得 } r = x = 1$$



$$\frac{S_{\text{三角形}}}{S_{\text{圆形}}}$$

设 $AB = 2$ 则 $AD = AC = 4$
说明 $\triangle ADC$ 是等边三角形
每个角 60°

直角 $\triangle ABC$, 可知 $\angle ACB = 30^\circ$
所对的边是斜边的一半
勾股定理可得 $BC = 2\sqrt{3}$

$$\frac{S_{\text{三角形}}}{S_{\text{圆形}}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}}{\pi \times 1^2} = \frac{3.464}{3.14} \approx 1.1$$

A. 小于 1

B. 1-1.5

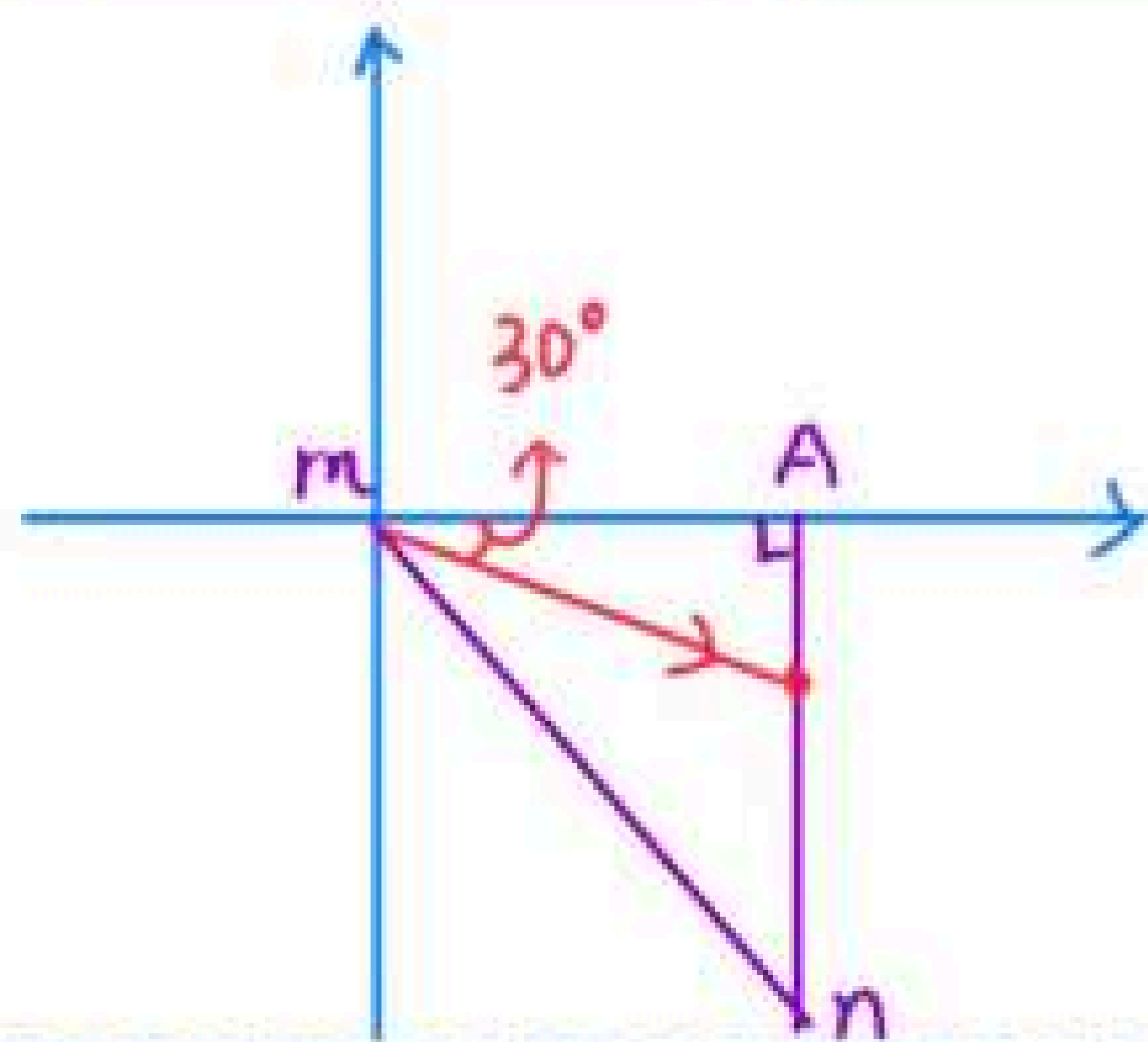
C. 1.5-2

D. 大于 2

坐标构造

【例8】(2025 山东事业单位) 某巡逻船在休渔期开展常规海上检查, 在海域 m 点发现其东南方向的 n 点有一艘渔船正匀速向正北方向行驶, 巡逻船在 m 点立即沿东偏南 30° 方向按照与渔船相同的速度行驶四海里后相遇, m 与 n 之间的距离多少海里?

- A. $2\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{3}$
C. $4\sqrt{2}$
D. $4\sqrt{3}$



$$mA = 2\sqrt{3}$$

$$An = 6$$

$$\text{勾股定理 } mn = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$$

小红书@贝栗子

三角形同底或者同高

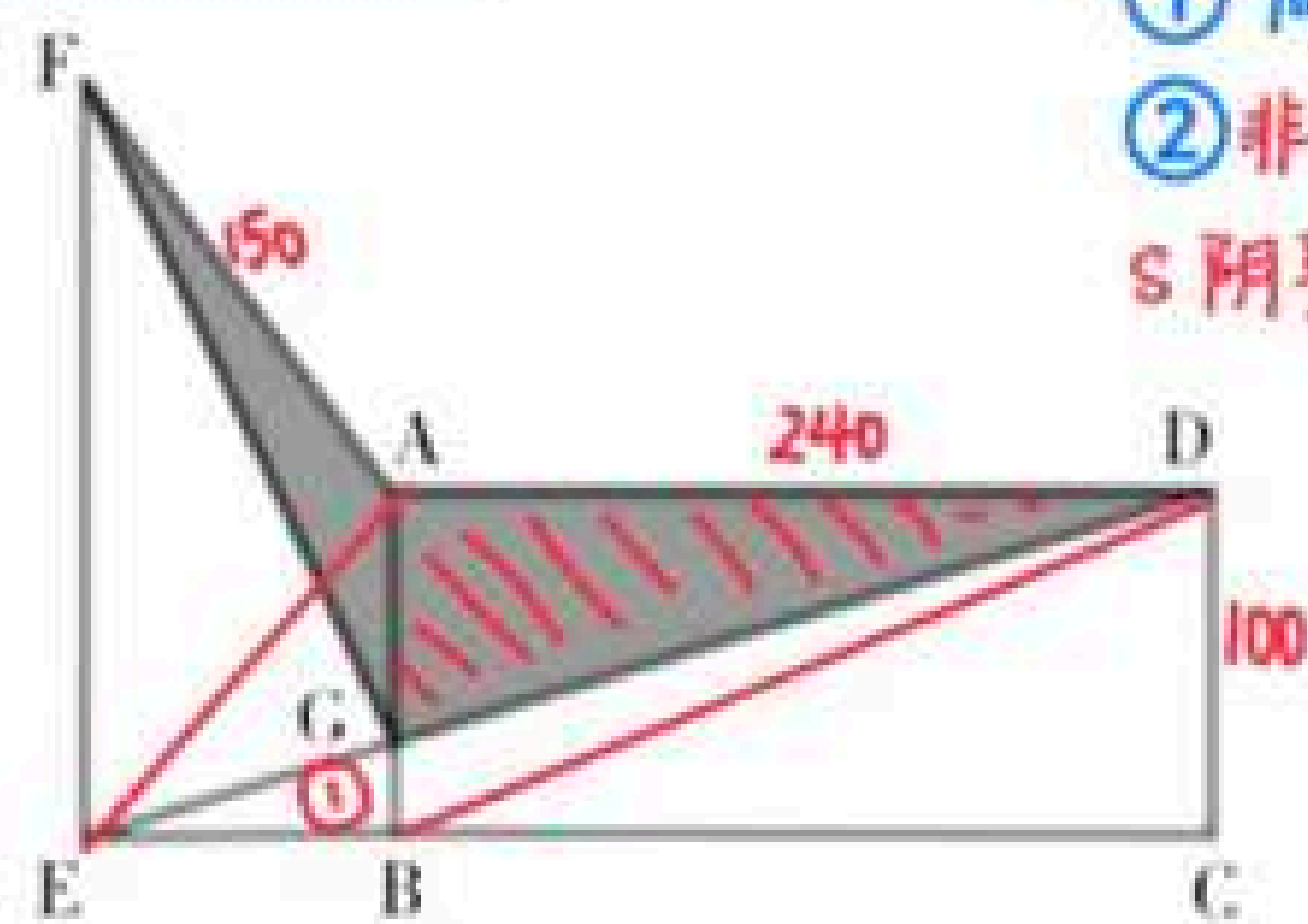
【例11】(2025 国考) 某厂区如图所示, 其中 $ABCD$ 为矩形, $ABEF$ 为直角梯形, AB 与 DE 相交于 G 点, 其中阴影区域 $ADGF$ 为涉密区域。已知 AD 、 AF 、 AB 长度分别为 240 米、150 米、100 米, 问涉密区域的面积为多少万平方米?

方法一: 非规则 → 规则

① 同底同高: $S_{\triangle AFG} = S_{\triangle AEB}$

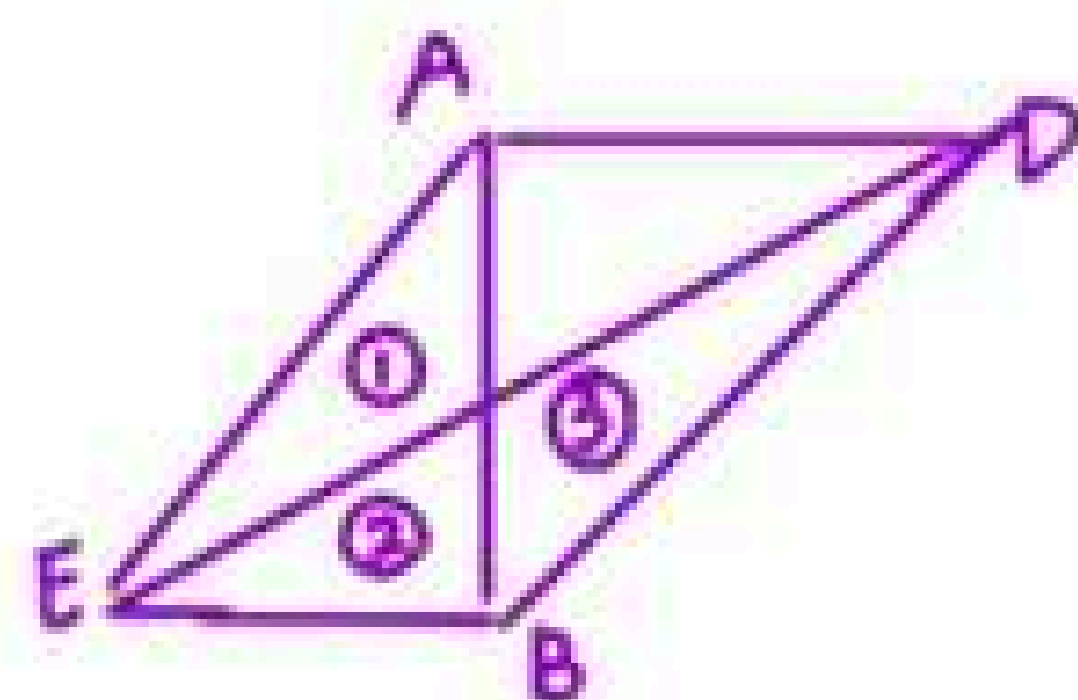
② 非规则 → 规则

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AED} = \frac{AD \times DC}{2} = \frac{240 \times 100}{2} = 12000$$



- A. 1.2
B. 1.3
C. 1.4
D. 1.5

方法二: 上下平行的蝴蝶定理



$$S_{\triangle EBA} = S_{\triangle EBD}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = \textcircled{2} + \textcircled{3}$$

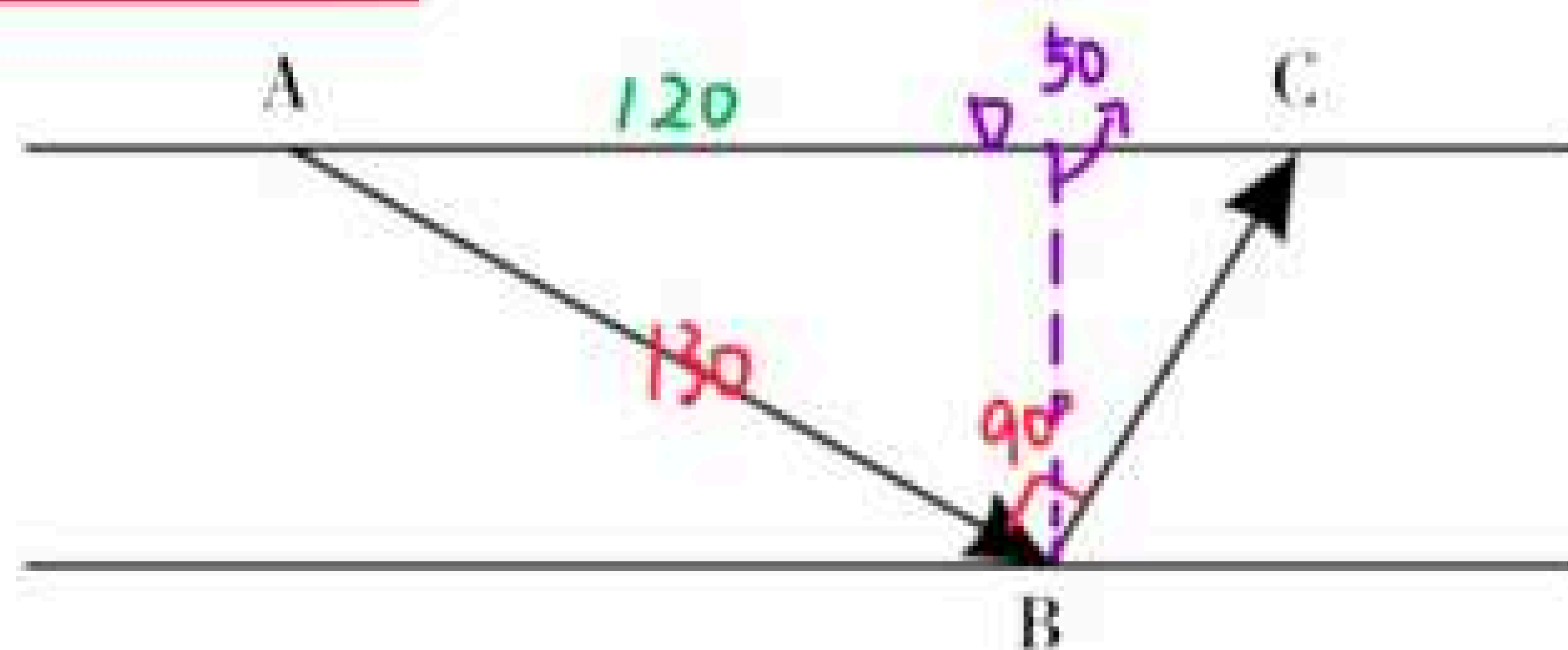
$$\text{翅} = \text{翅}$$

$$\text{所以 } \textcircled{1} = \textcircled{3} \text{ 所以阴影面积转化为 } S_{\triangle ABD} = 12000$$

小红书@贝栗子

相似三角形

【例13】(2024 全国事业单位联考) 一条东西向的河流宽 50 米, 如下图所示。甲划船从北岸的 A 点出发, 直线航行 130 米后到达南岸的 B 点, 然后向左转向 90° 继续直线行驶, 到达河流北岸的 C 点。问 A 、 C 两点的距离在以下哪个范围内? ()



方法二: 天子量

$$50 \text{ 米} = 1.9 \text{ cm}$$

$$AC = 5.6 \text{ cm}$$

$$\text{得 } AC \approx 147 \text{ 秒 } A$$

- A. 不到 150 米
B. 150 ~ 160 米之间
C. 160 ~ 170 米之间
D. 超过 170 米

$$S_{\triangle ABD} \text{ 可得 } AD = 120$$

$$\triangle ADB \text{ 和 } \triangle ABC \text{ 相似}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{120}{130} = \frac{AB}{AC} = \frac{130}{AC}$$

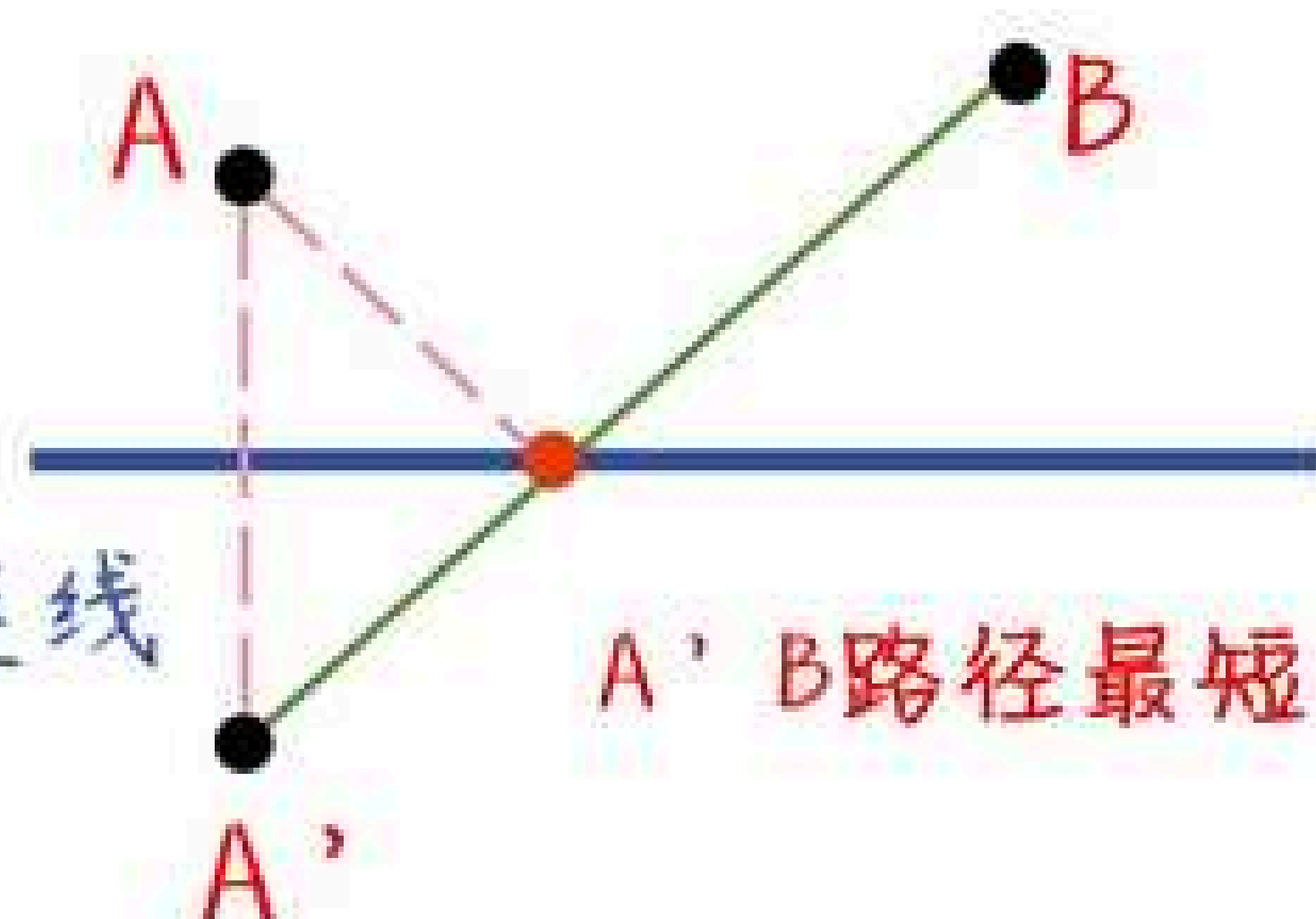
$$AC = \frac{130 \times 130}{120} < 150$$

最短路径

题型特征：求 AB 两点到直线距离之和最短

方法：两点异侧，直接连线

两点同侧，到直线的最短，镜面对称后连线



【例 14】（2024 国考）甲、乙两个联络站相距 10 千米。一条道路与甲、乙联络站连线平行，且与两联络站连线的垂直距离为 12 千米。现需紧邻该道路建一个工作站，问工作站距离甲、乙联络站距离之和最小为多少千米？

A. 20

求甲E + 乙E = 甲'乙

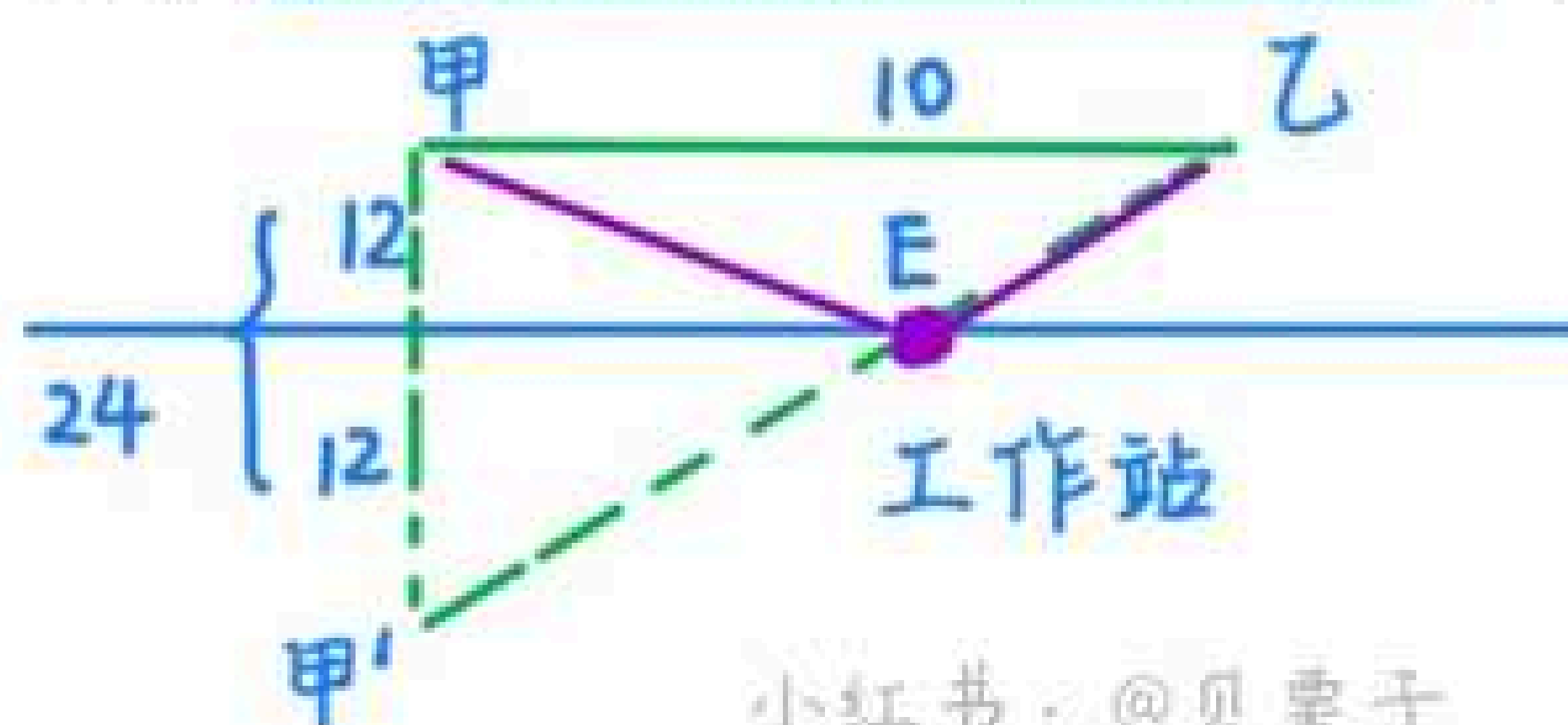
(折线 → 直线)

B. 22

直角△甲甲'乙勾股就可以得到

C. 24

D. 26



小红书：@贝栗子

几何最值

立体最值

若表面积一定，越接近于球，体积越大。（垃圾袋原理）

若体积一定，越接近于球，表面积越小。（饺子皮原理）

平面最值

周长一定，越接近于圆，面积越大；（耳机原理）

面积一定，越接近于圆，周长越小。（撕纸原理）

来源于小红书@贝栗子

长方形最值

(1) 四边形周长一定时，正方形面积最大。

(2) 四边形面积一定时，正方形周长最小

【例 15】（2024 联考）某公园绿化管理部门采购了 100 片围栏，每片长 1 米且不可弯折。

现拆分拟围成 5 块周长相等且互不相邻的矩形花卉区域。若不考虑拼接间隙，那么这 5 块区域的最大与最小面积最多可相差多少平方米？

A. 10

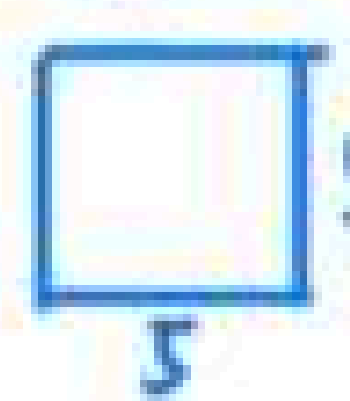
周长 = 100 × 1 = 100 米 (边 → 整数)

分成 5 块 → 每块 $100 \div 5 = 20 = 2(a + b) \rightarrow a + b = 10$

B. 12

什么时候最大?

最大正方形 $a = b = 5$



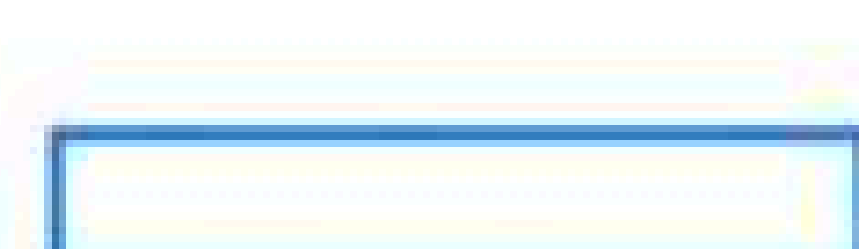
$S = 25$

→ S 相差 $25 - 9 = 16$

C. 16

最小长方形

$a = 1, b = 9$



$S = 9$

D. 25

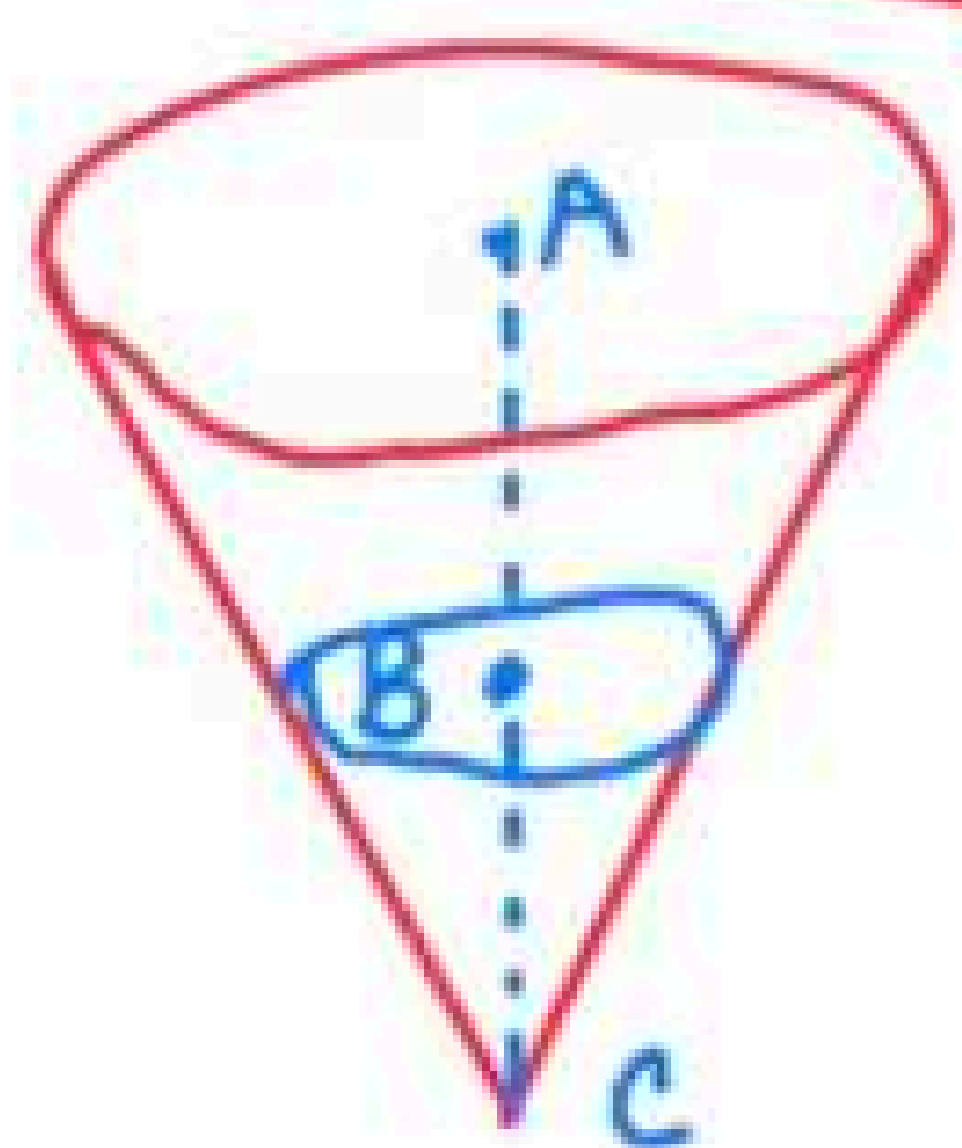
同比例放缩

若将一个图形尺度变为原来的 N 倍, 则

- 1、对应角度不变
- 2、周长变为原来的 N 倍, 增长了 $N-1$ 倍
- 3、面积变为原来的 N^2 倍, 增长了 N^2-1 倍
- 4、体积变为原来的 N^3 倍, 增长了 N^3-1 倍

【例 16】(2025 联考) 一个空的倒置的圆锥形容器, 倒入 1 瓶固定容量的水后, 水的高度恰好为容器高度的一半。若要使容器盛满水, 则需要再倒入水的瓶数为:

- A. 5 瓶
B. 7 瓶
C. 8 瓶
D. 10 瓶



$AC = 2BC$ 边之比 1:2 体积之比 1:8

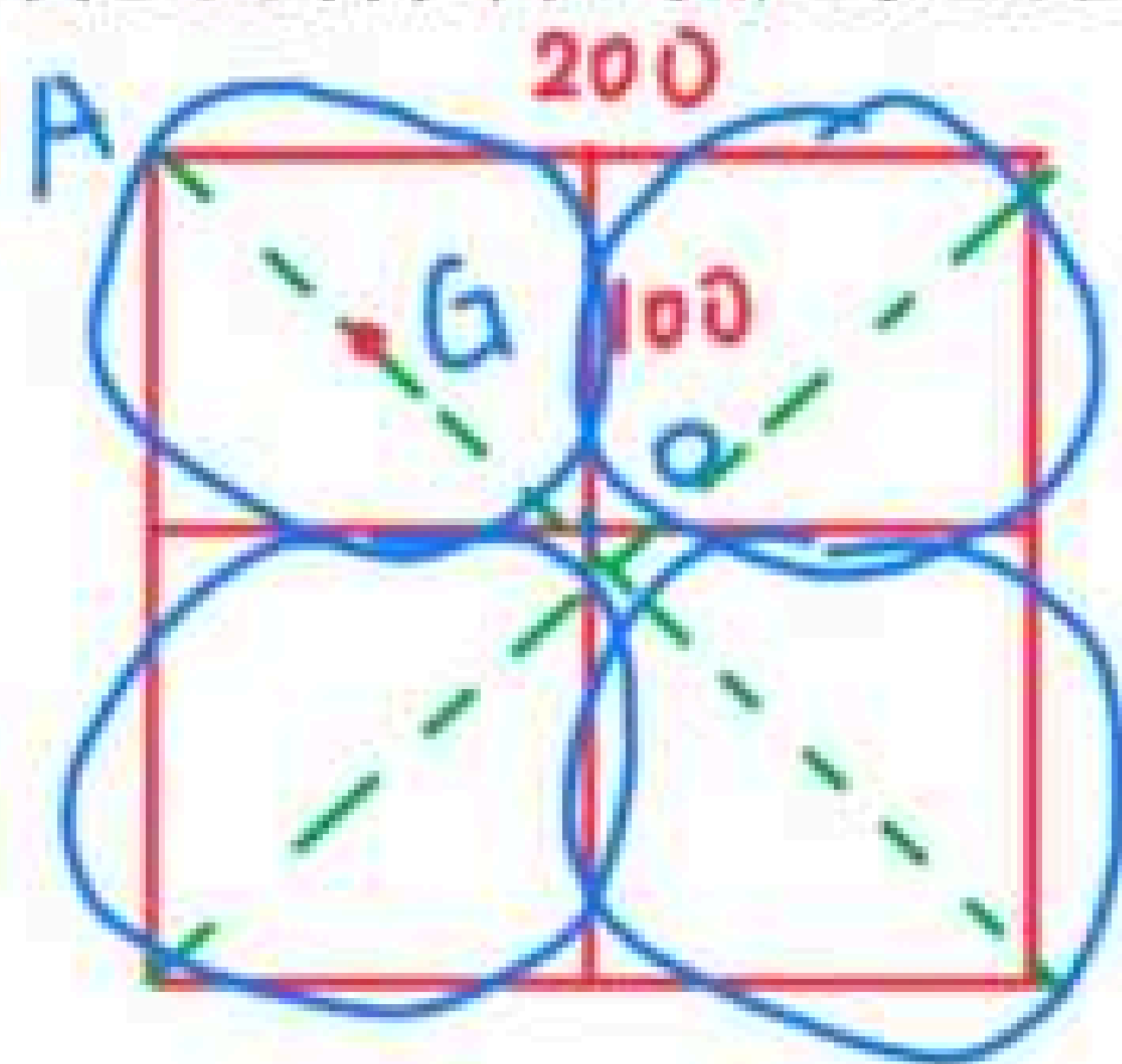
小圆锥 $\frac{1}{8}$
大圆锥 $= \frac{1}{8}$ 所以还需要 7 瓶

几何最优构造(手工操作题)

【新增】

【例 18】(2025 江苏) 某单位在边长为 200 米的正方形广场上组织一场招聘会, 计划安排若干名工作人员提供咨询服务, 每名工作人员入场后将分别随机站在一个位置上, 其服务半径不超过 $50\sqrt{2}$ 米。若要确保咨询服务全覆盖, 则至少需要安排工作人员:

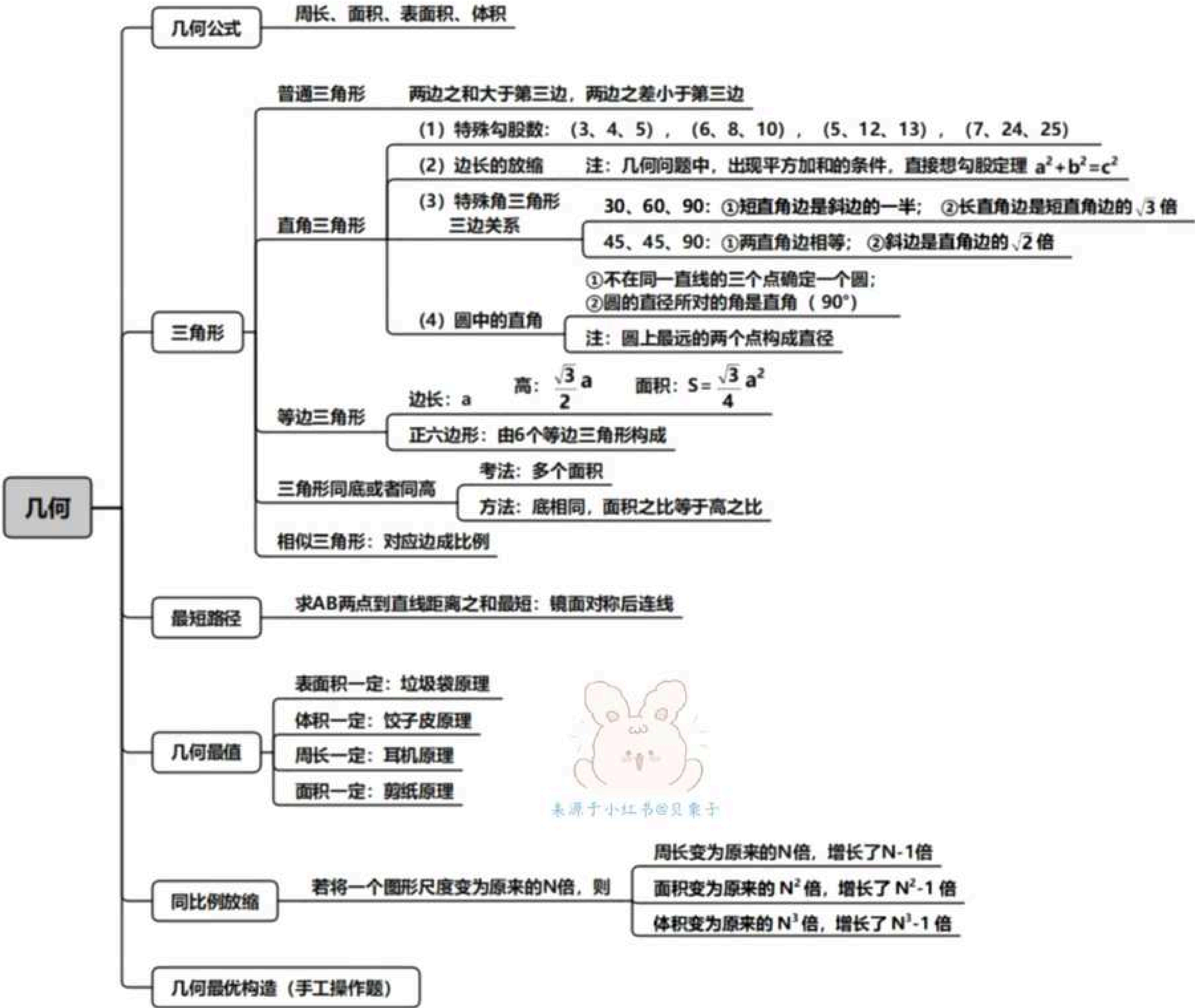
- A. 4 名
B. 5 名
C. 6 名
D. 7 名



直径 = 100

工作人员站在 AO 的中点上, 其服务范围就是正方形的外接圆, 恰好覆盖了 4 个顶点和 4 条边

同理另外也需要三个
所以至少 4 个



第六章 经济利润问题



来源于小红书@贝栗子

基础经济

- 成本、售价、利润、利润率(基期、现期、增长量、增长率)
(成本 售价 利润 利润率)
- 基本公式
- ① 利润=售价-成本
 - ② 利润率=利润÷成本
 - ③ 售价=成本+利润=成本×(1+利润率)
 - ④ 定价×折扣=售价
 - ⑤ 总利润=单个利润×数量=总售价-总进价

小红书: @贝栗子

资料分析解决 经济利润问题 利用: 基期、现期、增长量、增长率关系

线段法混合思想: 利润率=利润/成本

连续涨价(或跌价): $r_{\text{间}} = r_1 + r_2 + r_1 \times r_2$ $A=B \times C$ 解题法 混合利润率的量指成本转化为数量之比。

$$r_{\text{间}} = (-10\%) + (-10\%) + (-10\%) \times (-10\%) = -19\% \quad r_{\text{间}} = (-20\%) + 25\% + (-20\%) \times 25\% = 0$$

解题方法

方程法(有具体数)

- 列表(关系乱)
- 设未知数
- 根据等量列式子(合并约分)

赋值法

运用

- 给比例, 求比例
- 三量关系知道其一

方法

- ① 根据条件对相关量赋值即可
- ② 商品数量有比例, 优先赋值数量的个数(5、10)

小红书: @贝栗子

分段计费

识别特征: 纳税、水电费、出租车计费等, 每段计费标准不等
{ ... 规定为: ... 1300元(含)以内的部分..., 超出1300元部分... }

解题思路:

- ① 先按标准再分开看(分段)
- ② 计算之后汇总(汇总)

注意: 设未知数时, 设最后一段为X更容易求

函数最值

普通函数最值

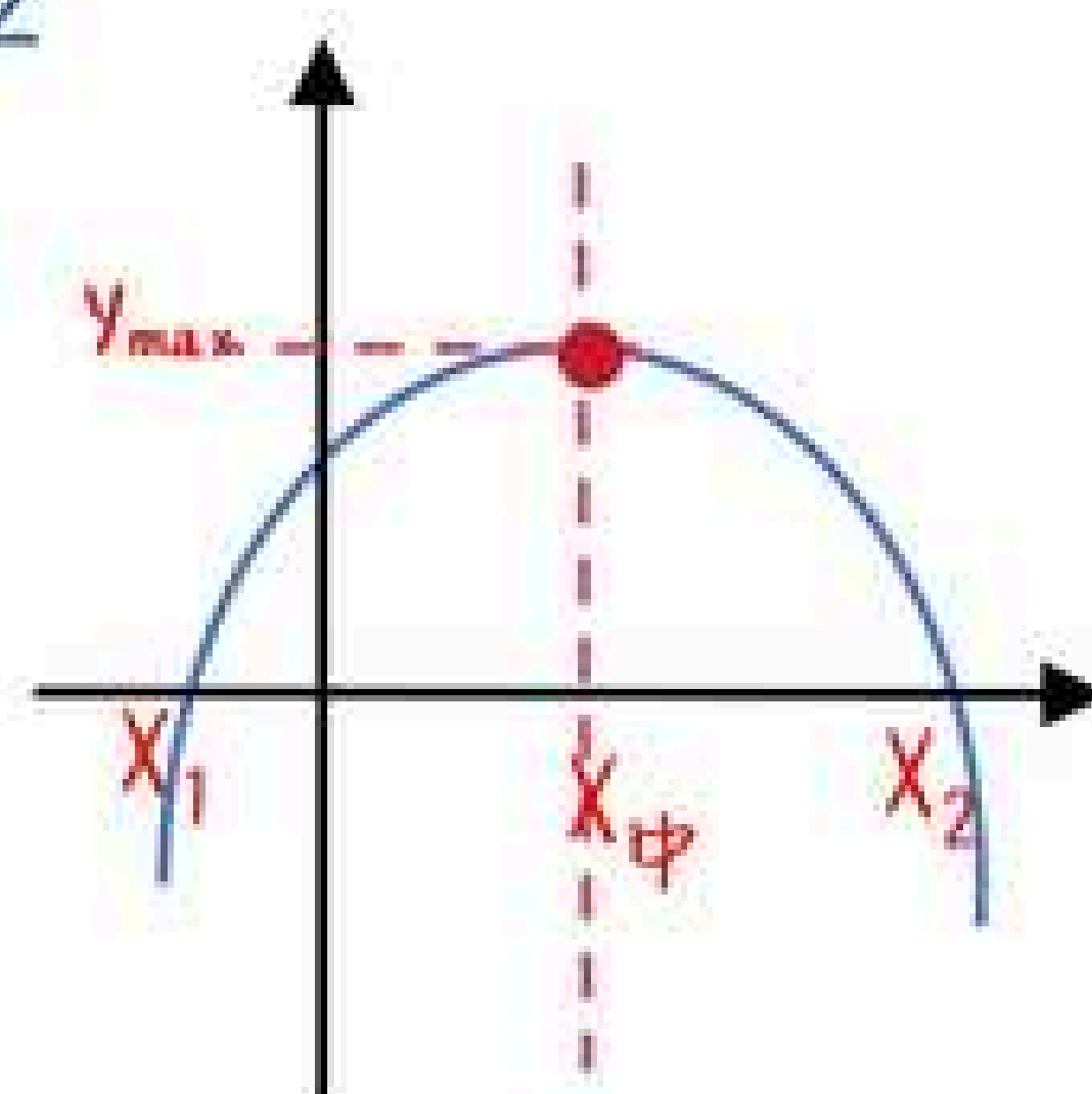
(单价和销量此消彼长, 问何时总收入/总利润最高?)

总利润=单利×数量 总收入=单价×数量

$$y = (a-x)(b+x)$$

- 方法
- ① 设次数, 列方程, 写成两括号相乘的形式
 - ② 求出使方程等于0, 解得 X_1 、 X_2
 - ③ 求出 $X_{\text{中}} = (X_1 + X_2) / 2$ 时, y 的值

易错点: 非整数时, 就近取整为最值



函数最值变形 ---- 例14

经济函数变形

排除法

用资料分析解决

【例4】(2024 联考) 某商家购进一批商品, 每件成本为27元, 最初将商品定价为每件40元, 该商家经过百分率相等的连续两次降价后, 每件商品的利润率不超过20%。问每次降价的百分率至少是:

- A. 20% 定价 r_1 某个售价 r_2
- B. 15% 40 32.4
- C. 10%
- D. 5%

$$r_{\text{间}} = \frac{-7.6}{40} = -19\% \quad \text{题干 } r_1 = r_2 \text{ 秒C}$$

$$\text{现期} = \text{基期}(1+r)$$

$$\text{售价} = 27 \times 1.2 = 32.4$$

要想降的少,
利润率取最
高售价高,所
以就取20%

小红书: @贝栗子

方程法

【例6】(2025 全国事业单位) 某厂商去年通过售卖某产品 5000 件获得 5 万元利润, 今年单件产品降低了 20% 的利润, 仍然获得 5 万元利润。问该产品今年出售了多少件?

- A. 5500
- B. 5750
- C. 6000
- D. 6250

$$\begin{array}{l} \text{去年} \quad 50000 \\ \text{今年} \quad 50000 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{总利润} = \text{单利润} \times \text{数量} \\ 10 \text{元/件} \quad 5000 \\ 8 \text{元/件} \quad x \end{array}$$

$$\text{所以 } x = 50000 \div 8 = 6250$$

赋值法

【例10】(2025 国考) 某种商品在定价基础上打八折销售, 打折之前每天卖 40 件, 开始打折第一天起, 每天都比前一天多卖 10 件。打折销售 15 天的利润总额与打折之前销售 20 天的利润总额相同, 问这种商品的成本是定价的:

赋值定价10, 设成本 x 则利润 $= 10 - x$

	成本	定价	利润
不打折	x	10	$10 - x$
打折	x	8	$8 - x$

根据利润相同, $800 \times (10 - x) = (8 - x) \times 1800$
 $x = 6.4$ 所以 $6.4 \div 10 = 64\%$

打折前: 每天40件 销售20天共 $20 \times 40 = 800$ 件

打折后: 15天: 50 60 70 80 90 170 180 190

打折销售15天共1800件

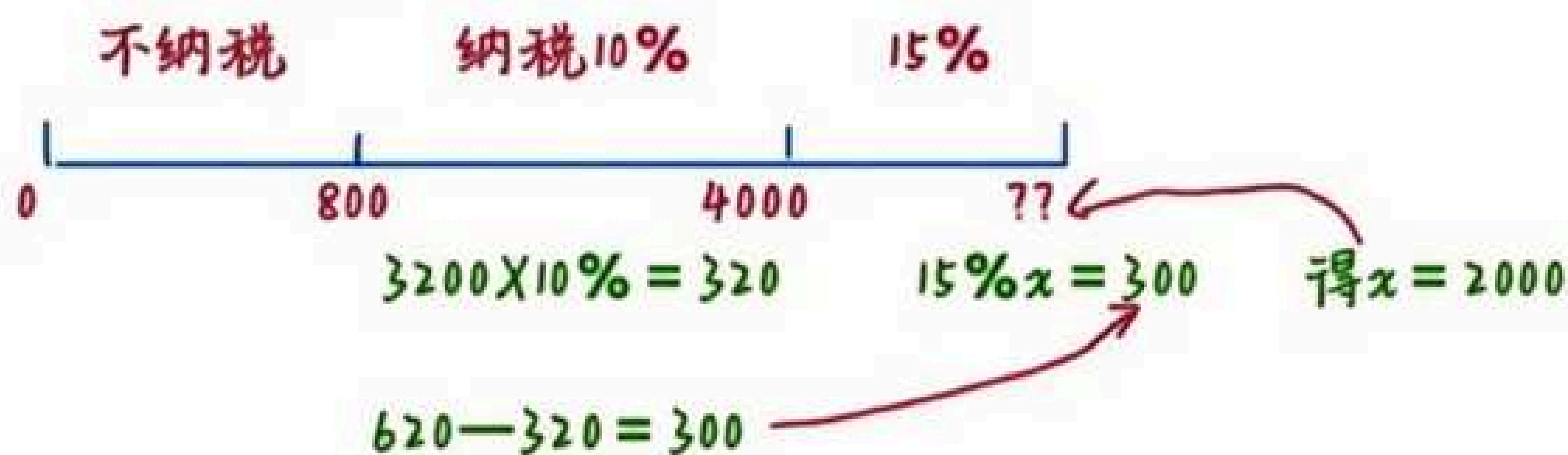
方法一: 15个数——7对240 中间是120 即 $7 \times 240 + 120 = 1800$

方法二: 等差求和: $S_n = \frac{15(50 + 190)}{2} = 1800$

分段计费

【例 11】(2021 河北) 假设个人出版著作所得稿费纳税方法如下: (1) 稿费不超过 800 元不纳税; (2) 超过 800 元但不超过 4000 元的部分纳税 10%; (3) 超过 4000 元的部分纳税 15%。已知张教授出版一部著作, 纳税 620 元, 则张教授的这笔稿费是多少元?

- A. 9000
B. 8000
C. 7000
D. 6000



小红书: @贝栗子

函数最值

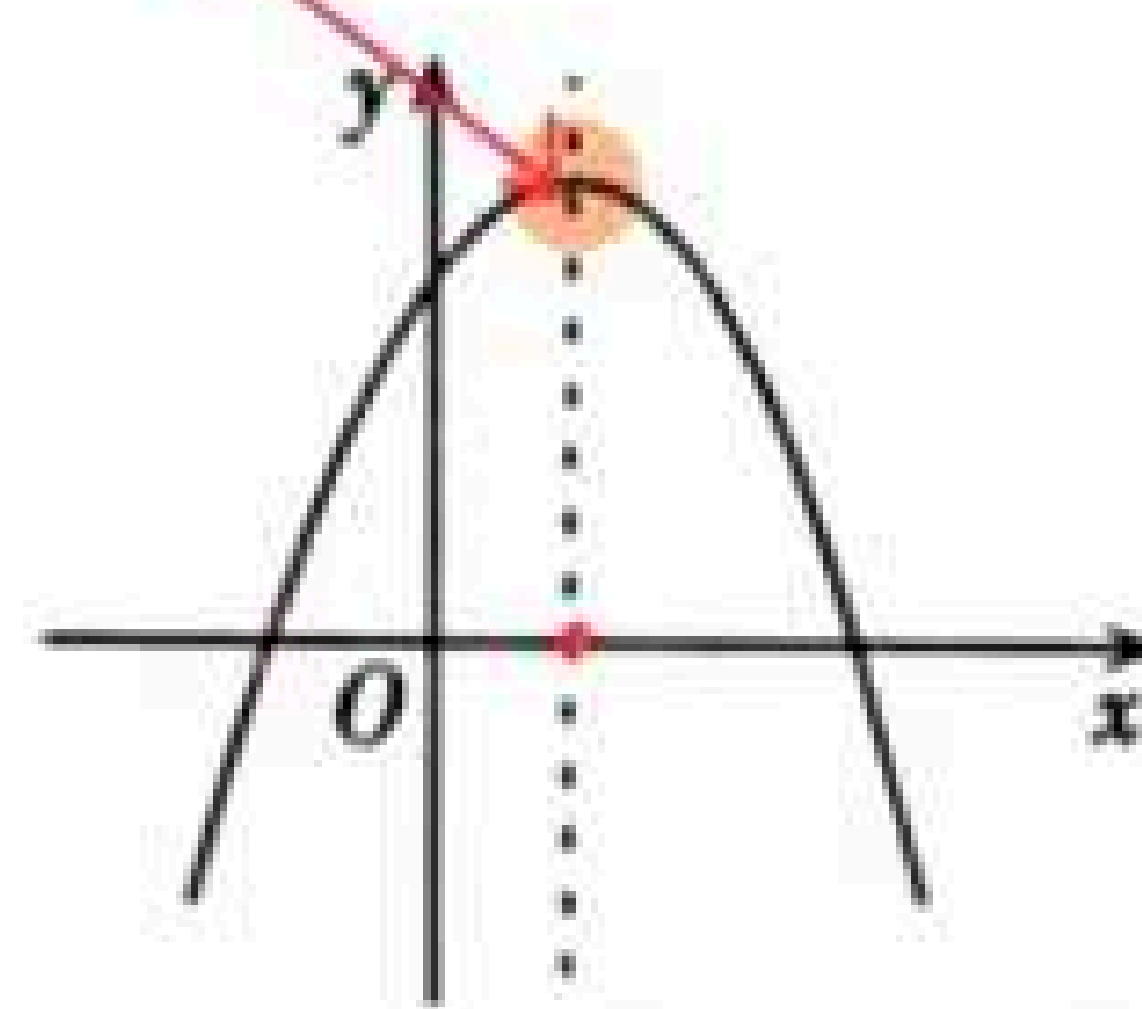
【例 12】(2020 江苏) 某商品的进货单价为 80 元, 销售单价为 100 元, 每天可售出 120 件。已知销售单价每降低 1 元, 每天可多售出 20 件。若要实现该商品的销售利润最大化, 则销售单价应降低的金额是:

- A. 5 元
B. 6 元
C. 7 元
D. 8 元

设降低 1 元次数为 x 次
根据总利润 = 单利 $\times$ 数量
 $y = (20 - x)(120 + 20x)$
令 $y = 0$ 可得 $x_1 = 20$ $x_2 = -6$

$$x_{\text{中}} = \frac{20 + (-6)}{2} = 7$$

如图可知利润最大—— y 最大
即此时是 $x_{\text{中}} = 7$ 降价 7 元



小红书: @贝栗子

函数变形

【例 14】(2025 联考) 某商场开展减价促销活动, 每件商品进价 5 元, 售价 10 元, 卖出 5 件。若每降价 1 元, 则销量增加 5 件。问降价多少元后, 总利润不变?

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

利润 = 售价 - 成本 = $10 - 5 = 5$

售出 5 件: 利润 = $5 \times 5 = 25$ 元

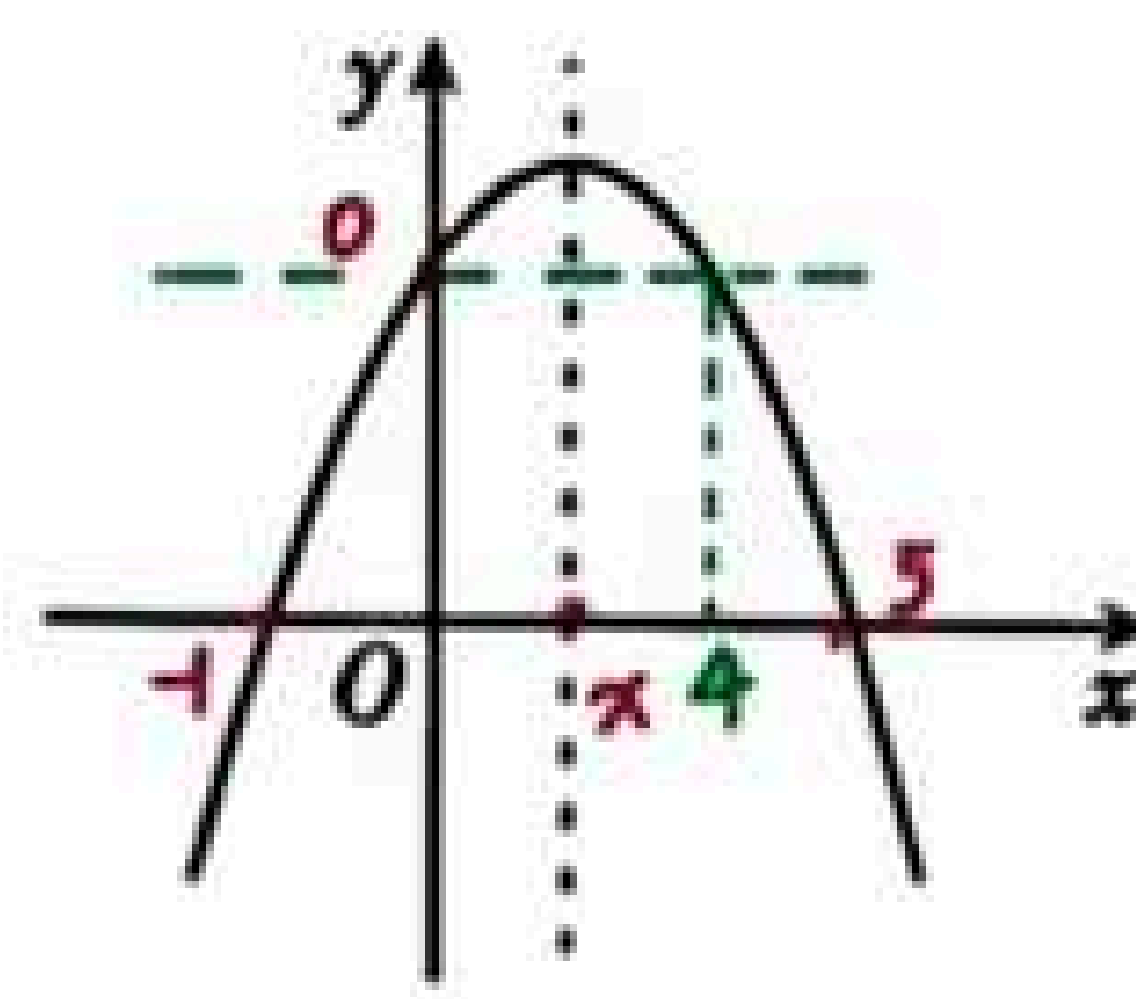
$$y = 25 = (5 - x)(5 + 5x)$$

令 $y = 0$ $x_1 = -1$ $x_2 = 5$ $x_{\text{中}} = 2$

如图设变化为 x 价格不可能负

所以一开始 0, 利润不变—— y 不变

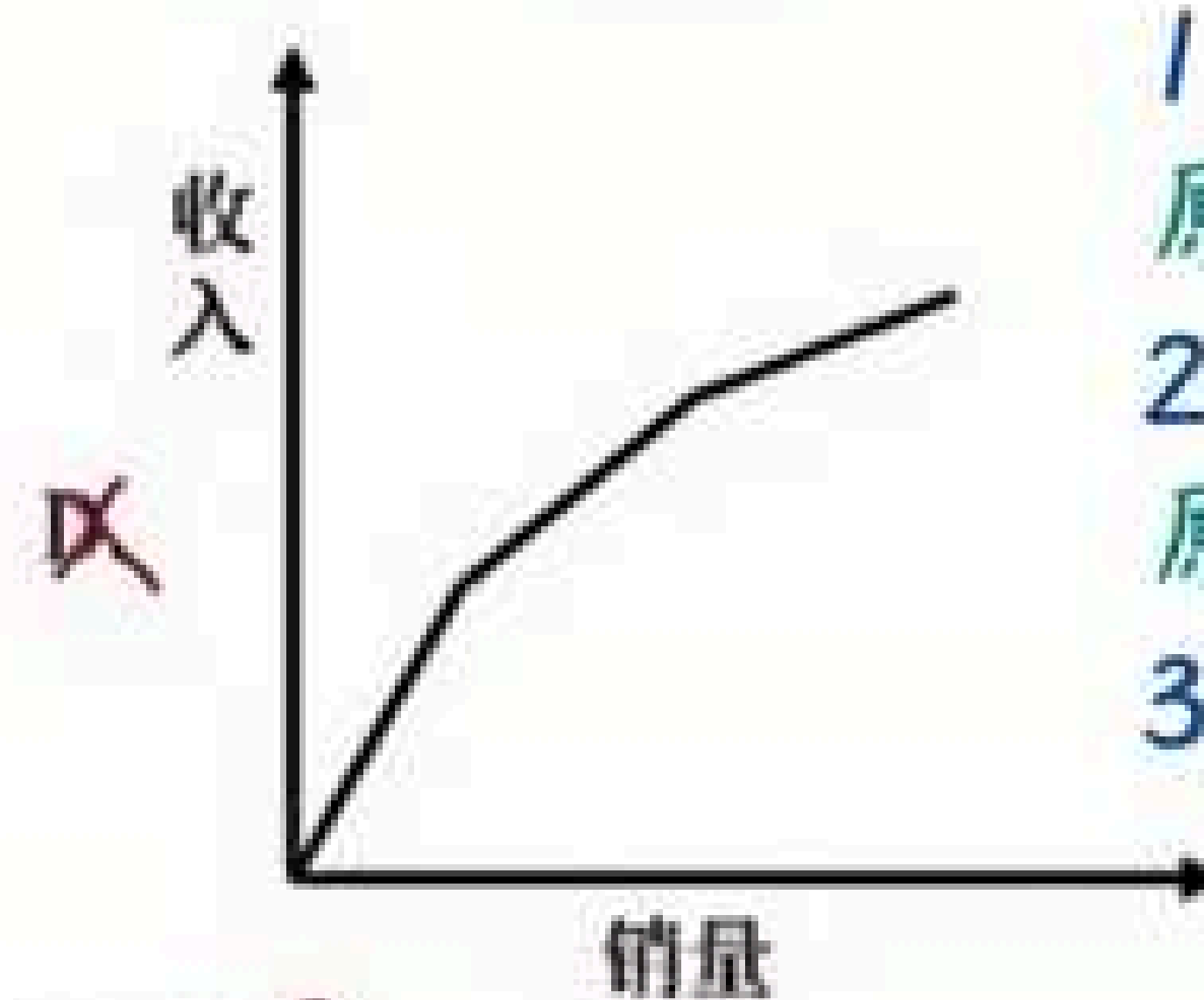
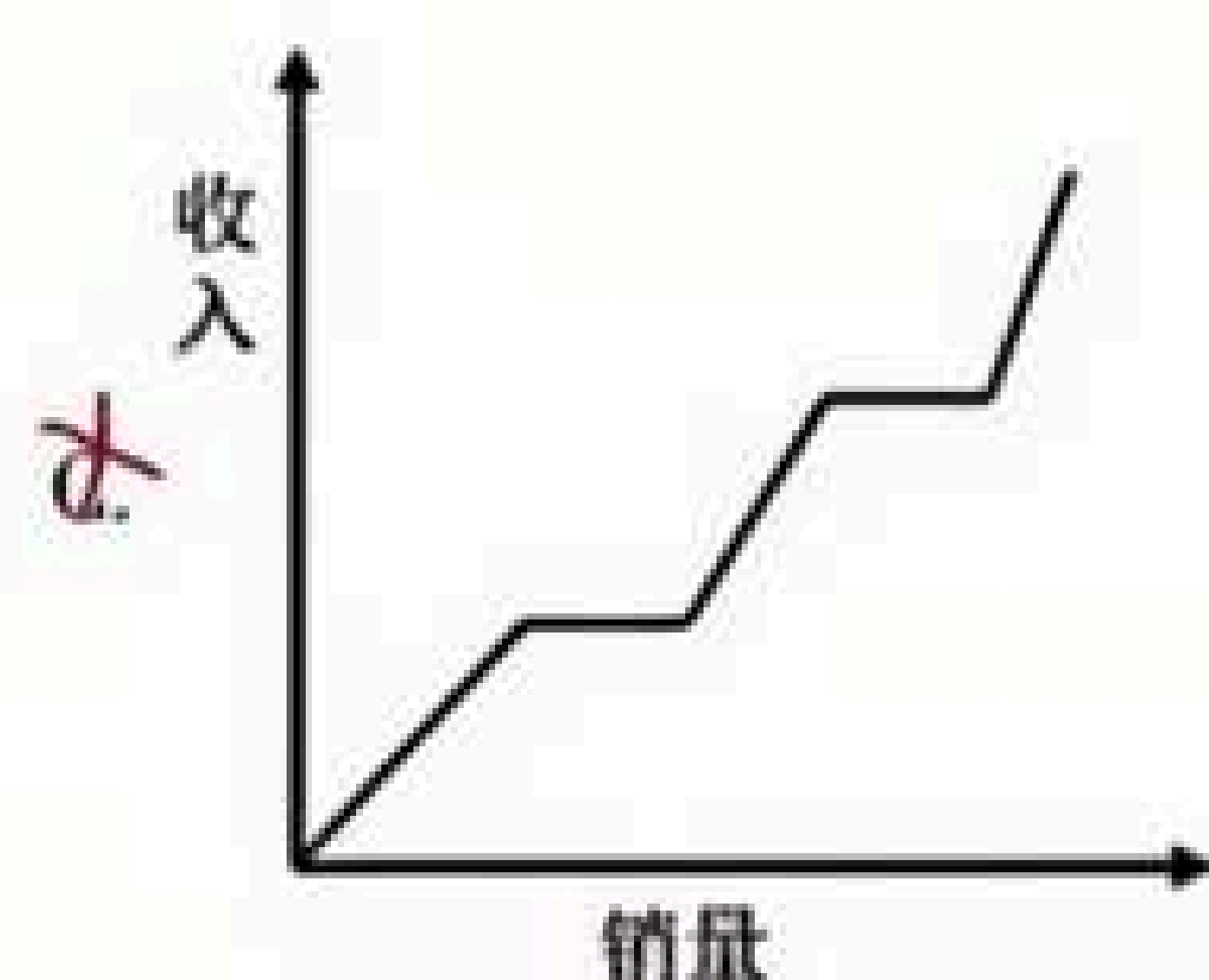
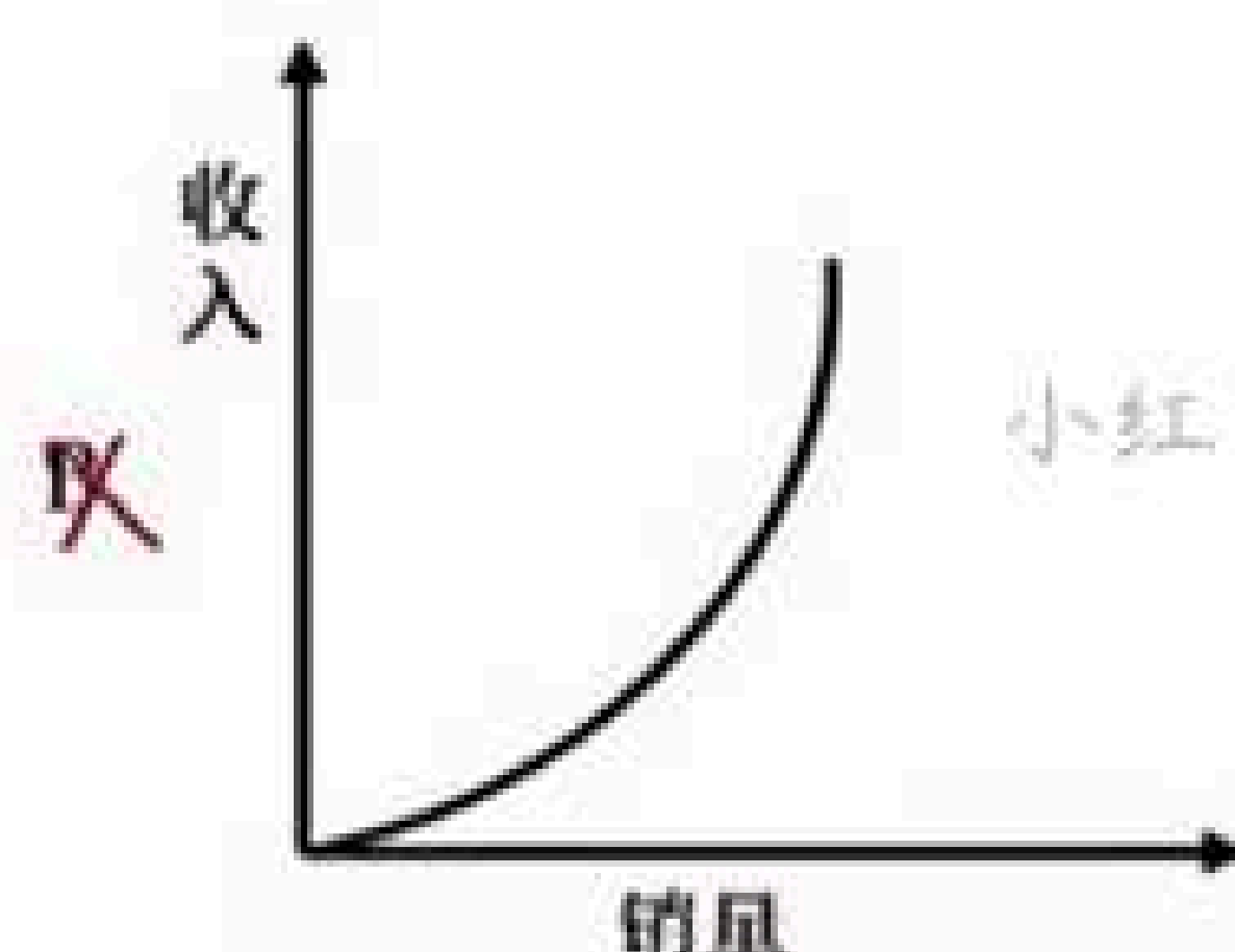
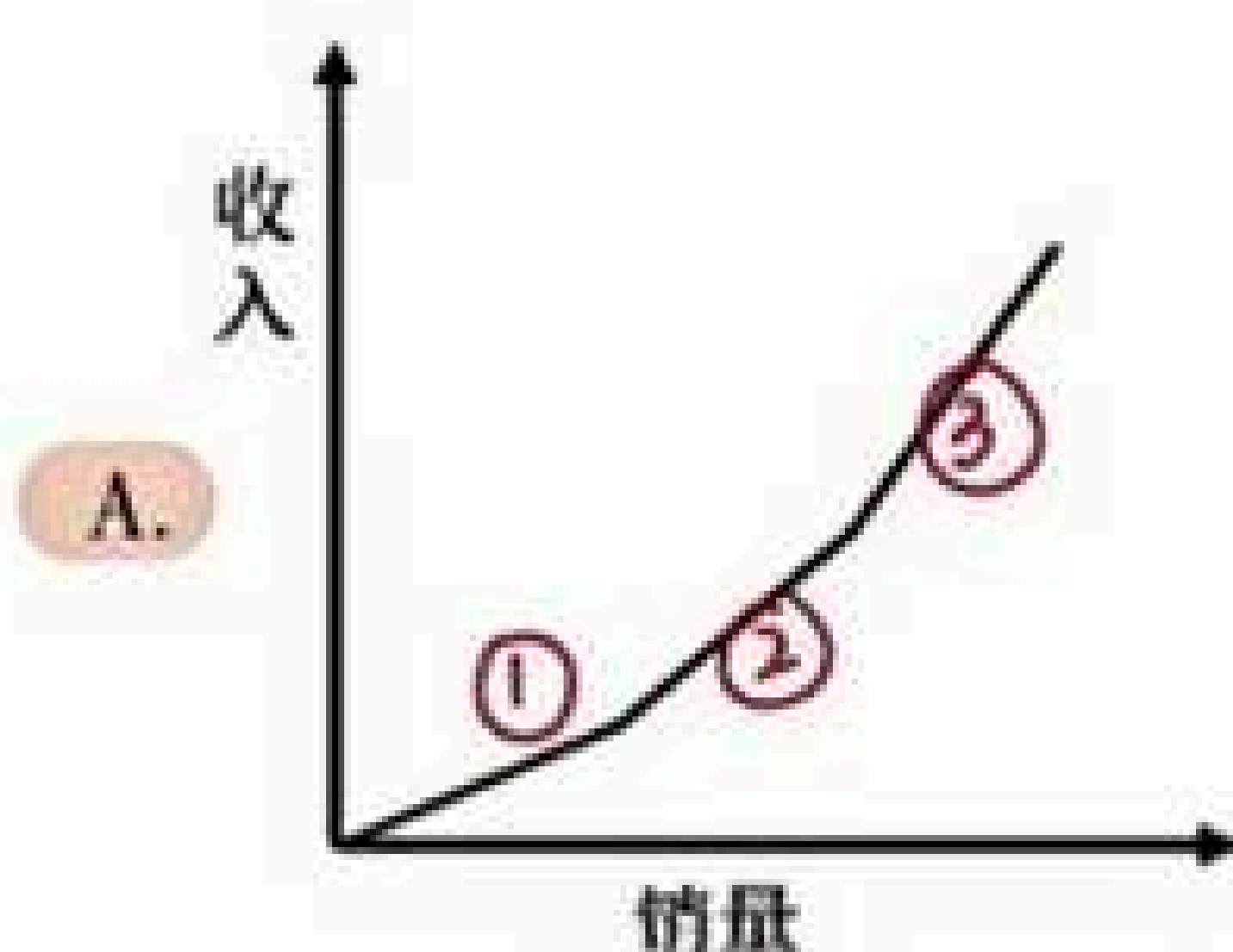
看图 $x = 4$ 和 $x = 0$ 时, y 相同



经济函数变形

排除法

【例 16】(2025 国考) 化工商店出售 200 千克某种试剂, 前 60 千克打 2 折出售, 之后 60 千克打 5 折出售, 剩余部分原价出售。以下坐标图中, 最能准确反映该试剂销量和销售收入之间关系的是:



小红书: @贝栗子

单价 $\times$ 数量 = 总收入1: = 原价 $\times 0.2 \times$ 数量

原价越贵 收入增长越多 CD 排除

2: = 原价 $\times 0.5 \times$ 数量

原价越贵 收入增长越多 选 A

3: = 原价 $\times$ 数量

总收入 = 单价 $\times$ 数量 ③
 原价 $\times 0.2 \times$ 数量 ①
 原价 $\times 0.5 \times$ 数量 ②

成本、售价、利润、利润率 (基期、现期、增长量、增长率)

① 利润 = 售价 - 成本

来源于小红书@贝栗子

② 利润率 = 利润 $\div$ 成本③ 售价 = 成本 + 利润 = 成本 $\times$ (1 + 利润率)④ 定价 $\times$ 折扣 = 售价⑤ 总利润 = 单个利润 $\times$ 数量 = 总售价 - 总进价

资料分析解决经济利润问题

解题方法

方程法 (有具体钱数)

① 列表 (关系乱)

② 设未知数

③ 根据等量列式子

赋值法

① 给比例, 求比例

② 三量关系只知其一

小红书: @贝栗子

经济

分段计费

判定: 纳税、水电费、出租车计费等, 每段计费标准不等

方法

① 先按标准分开看

② 计算之后再汇总

注: 设未知数时, 不要设总长度为 x , 设最后一段为 x 更容易求解。

函数最值

普通函数最值

判定: 单价和销量此消彼长, 问何时总收入/总利润最高?

总利润 = 单个利润 $\times$ 数量、总收入 = 单价 $\times$ 数量如: $y = (a - x)(b + x)$

易错点: 非整数时, 就近取整为最值

函数最值变形

经济函数图形

排除法

第七章 最值问题

一、最不利构造

特征：至少...才能保证、(变形)无论如何至少...

方法：最不利情形+1 (最倒霉情况+1)
够：少一个；不够：全给你

最不利构造和排列组合结合 方法：枚举或者简单排列组合

注意：要保证同种情况至少 n 个，应每种情况各取 $(n-1)$ 个
(如果有不够 $n-1$ 的有多少取多少)，最后再加 1。

例子：口袋有5个红球，8白球，10黑球。

小红书：@贝栗子

①至少摸出(19)个球，才能保证一定摸出红球

理解：最倒霉情况是摸出来了18个(8白球+10黑球)

所以最倒霉情况+1=18+1=19

②至少摸出(7)个球，才能保证一定摸出3个相同球

最倒霉情况是红、黑、白、红、黑、白(6个)、红

则最倒霉情况+1=6+1=7

③至少取出(20)个，才能保证至少有8个同色的球?

理解：最倒霉情况是摸出来了的球顺序5黑7白7黄=19 则最倒霉情况+1=19+1=20

(1)普通最不利构造

【例2】(2025 广东)箱子里装有红、蓝、绿、白、黑五种颜色的小球各20个。如果从箱子里取出若干个小球，且确保其中有10个小球颜色相同，则至少要取出()个小球。

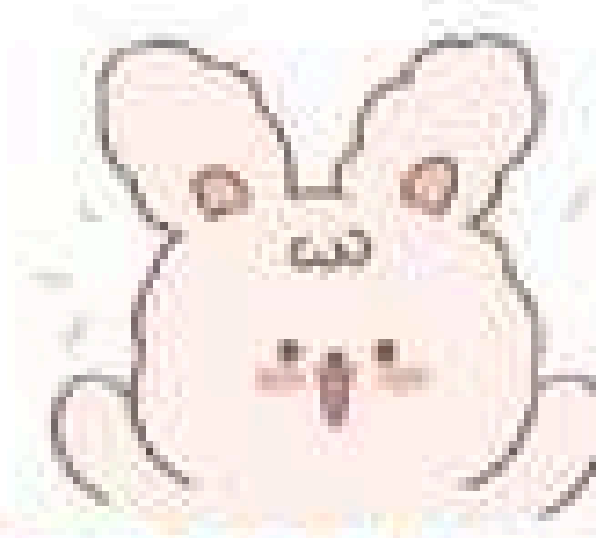
A. 56

B. 51

C. 50

D. 46

最坏情况 先5种球各抽到9个
所以是最坏+1=5×9+1=46



来源小红书@贝栗子

(2)最不利构造和排列组合结合(枚举或者简单排列组合)

【例4】(2024 联考)某部门工会为丰富职工文化生活、增进职工身心健康,组织开展了拔河、羽毛球、乒乓球、台球四项比赛活动,每名职工参加一项或者两项比赛。若要保证至少有5名职工参加的比赛项目完全相同,则该部门参加比赛的职工至少有:

- 方法一:做
- A. 40 名
B. 41 名
C. 50 名
D. 51 名
- 一个人情况:
参加一项 ABCD 4种情况
参加两项(枚举) $3+2+1=6$
10种
要使5名相同,则最坏的情况是 4×10
所以是最坏 + 1 = $40 + 1$

方法二:猜

AB选一个
CD选一个
每种情况选4个
即4的倍数 总情况 - 1 = 是4的倍数 B

二、构造数列

特征: 最多...求最少...、最少的...最多...、排名第...最多(少).....

- 方法:
- ① 构造一个名次(排序)
 - ② 求谁设谁(定位)
 - ③ 反向推其它(立正)(构造)
 - ④ 加和求解(求和)

坑点:

- 1、主体个数是否相同
- 2、答案是非整数时: 反向取整

问最少--向上取整
问最多--向下取整

变形: 总量未知的, 构造数列----- 总量为范围, 根据问法, 确定总量的值

【例6】(2022 上海)某单位进行了一次绩效考评打分, 满分为100分。有5位员工的平均分为90分, 而且他们的分数各不相同, 其中分数最低的员工得分为77分, 那么排第二名的员工至少得()分。(员工分数取整数)

- A. 90
B. 92
C. 94
D. 96
- ①构造名次
②③求谁设谁, 求其他
④加和求解
- | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|-----|-----|----|
| 100 | x | x-1 | x-2 | 77 |
- $100 + 3x - 3 + 77 = 450$ 得 $x = 92$
- $= 5 \times 90 = 450$

考法二：（新增）总量未知的，构造数列

方法：总量为范围，根据问法，确定总量的值。

【例 12】（2022 联考）某单位有甲、乙、丙三个存放着电脑的库房，已知甲库房比乙库房多 4 台电脑，乙库房比丙库房多 2 台，丙库房和甲库房共 22 台。现在要将三个库房的所有电脑发放给单位不同部门，要求每个部门获得的电脑数量均不相同，那么最多可以发放给几个部门？

小红书：@贝栗子

A. 6

$$\text{甲} - \text{乙} = 4 \text{ ①}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } \text{甲} + \text{丙} - 2\text{乙} = 2$$

部门 1 2 3 4 7

B. 7

$$\text{乙} - \text{丙} = 2 \text{ ②}$$

$$\text{得 } \text{乙} = 10$$

数量 1 2 3 4 5 6 7

C. 8

$$\text{甲} + \text{丙} = 22 \text{ ③}$$

$$\text{所以 } \text{甲} + \text{乙} + \text{丙} = 22 + 10 = 32$$

28 台了 剩下 4 台不能分
第八个部门

D. 9

三、多集合反向构造

特征：至少...都...情况下，都满足的最少/至少

方法：① 逆向思考，反向-----求和-----作差

来源于小红书@贝栗子

小红书：@贝栗子

$$\text{② } (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) - (n-1) \times \text{总量}$$

【例 13】（2022 江苏）某机构对全运会收视情况进行调查，在 1000 名受访者中，观看过乒乓球比赛的占 87%，观看过跳水比赛的占 75%，观看过田径比赛的占 69%。这 1000 名受访者中，乒乓球、跳水和田径比赛都观看过的至少有：

A. 310 人

① 反向：

$$\text{② 求和} = 130 + 250 + 310 = 690 \text{ 人}$$

B. 440 人

不看乒乓 130 人

$$\text{③ 作差} = 1000 - 690 = 310$$

C. 620 人

不看跳水 250 人

不看田径 310 人

D. 690 人

方法二：

$$(870 + 750 + 690) - (3-1) \times 1000$$

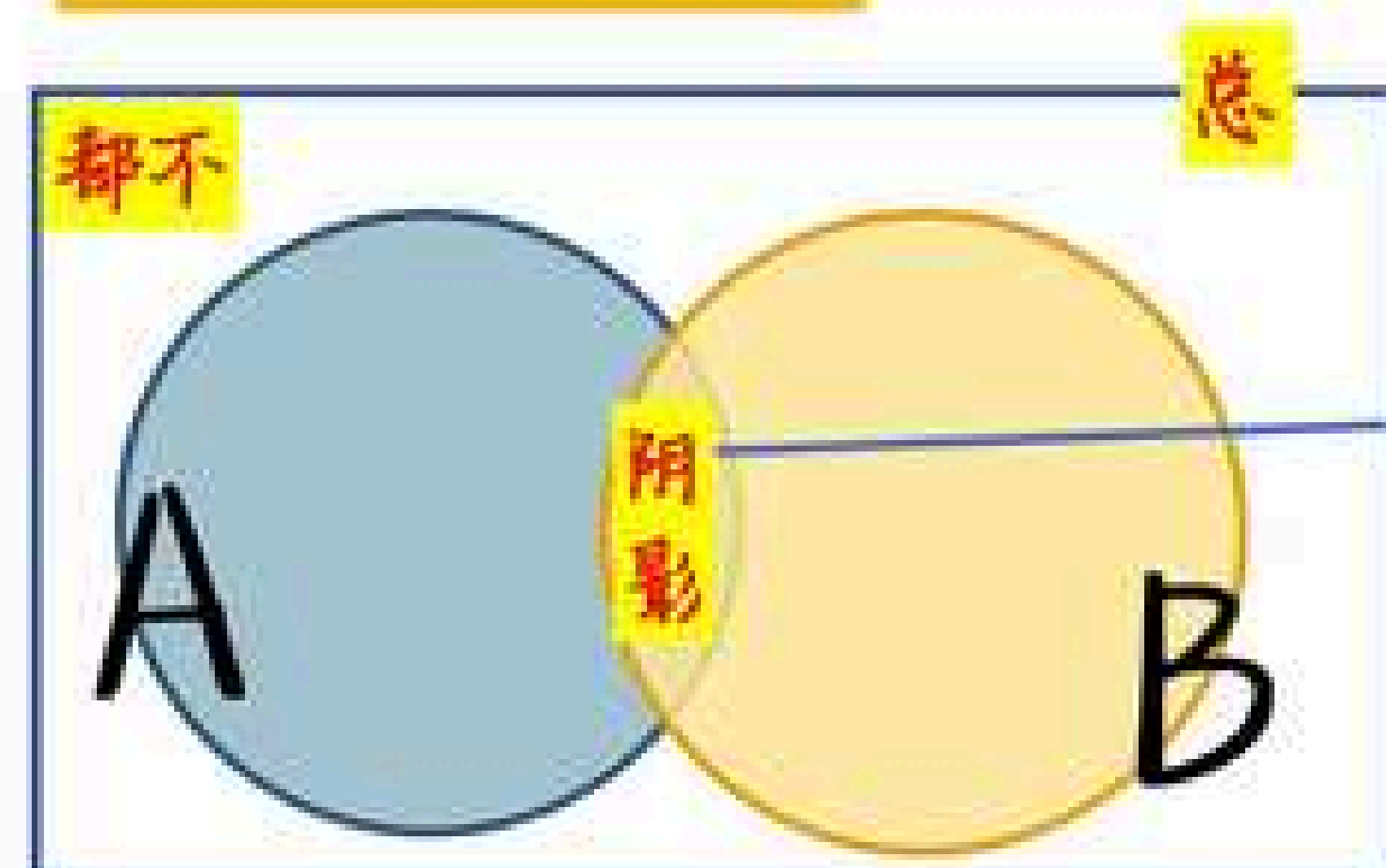
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 00$$

$$\text{尾数法 } 10 - 00 = 10 \text{ A}$$



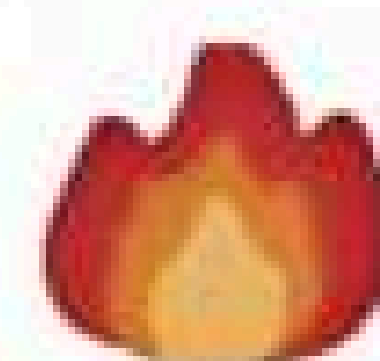
第八章 容斥原理问题

一、两集合



$$\text{阴影} = \text{总} - \text{都不} - A - B$$

$$A + B - A \cap B = \text{总} - \text{都不}$$



两集合变形

【例3】(2025 国考) 某研发小组员工中, 60% 的人参与了 A 项目, 45% 的人参与了 B 项目,

两个项目都参与的人比两个项目都不参与的多 2 人。问该研发小组有多少人?

A. 100

B. 50

C. 40

D. 20

$$A \cap B - \text{都不} = 2$$

设 x 人

$$A + B - A \cap B = \text{总} - \text{都不}$$

$$\text{转化为 } A + B - \text{总} = A \cap B - \text{都不} = 2$$

$$0.6x + 0.45x - x = 2$$

$$\text{得 } x = 40$$



来源于小红书@贝栗子

二、三集合

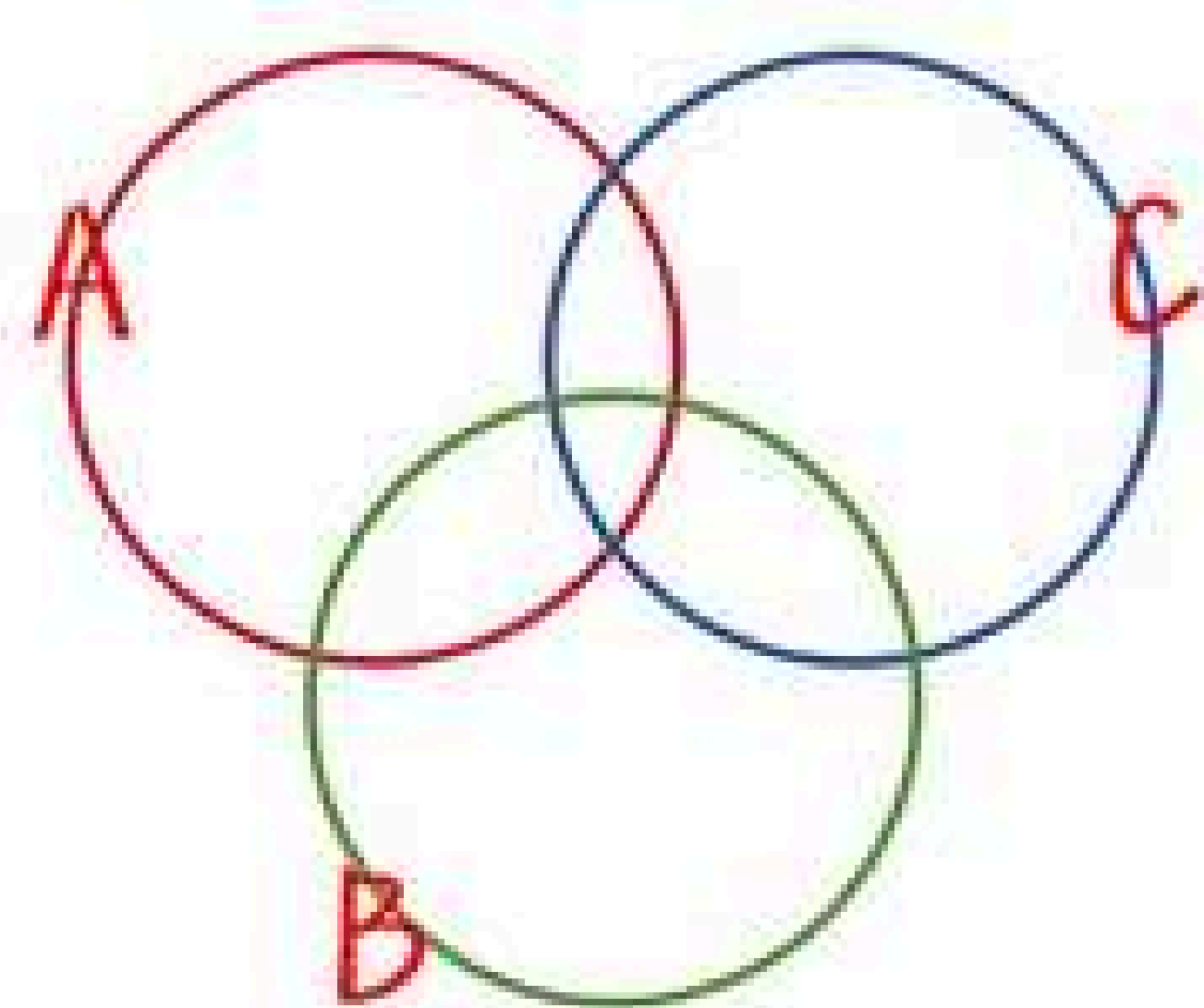
标准型

识别: $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ 分别给出两两集合的交集

$$A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C = \text{总} - \text{都不}$$

要注意:

如果题目说招聘员工, 结果都报名了, 那说明: 都不=0



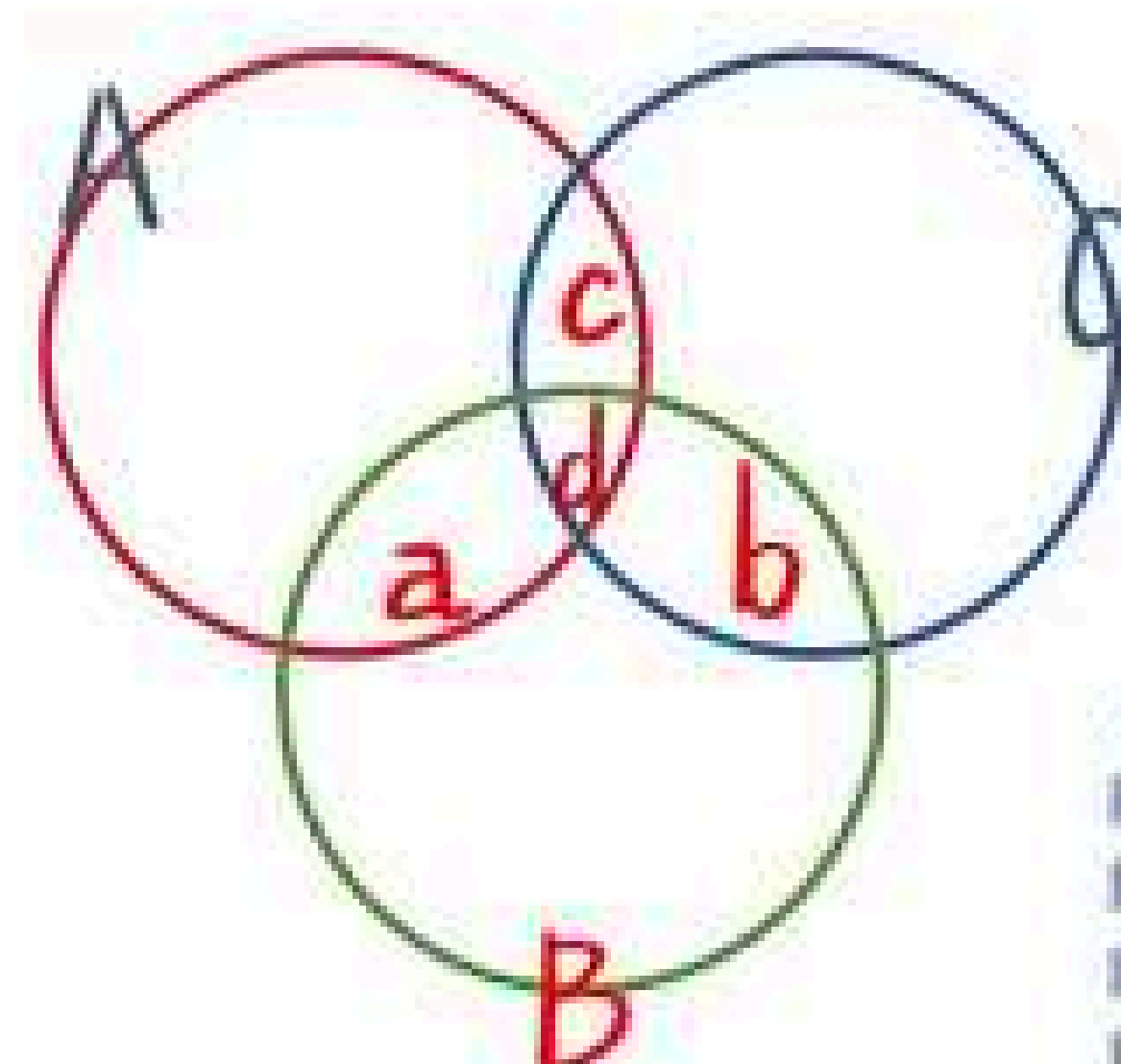
非标准型

识别: 给出只满足两种 (满足两个条件)

$$A + B + C - \text{只满足两个条件的} - 2 \times \text{满足3个条件的} = \text{总} - \text{都不}$$

指 a 、 b 、 c 区域指 d 区域

当题目说“(只)满足2个条件”时才能使用



例子: 举行运动会有三个项目参加, 长跑49人, 跳远36人, 短跑28人, 只参加两个项目的13人, 参加三个项目有9人。问参加运动会的总人数。

表示 $d=9$ 表示 $a+b+c=13$

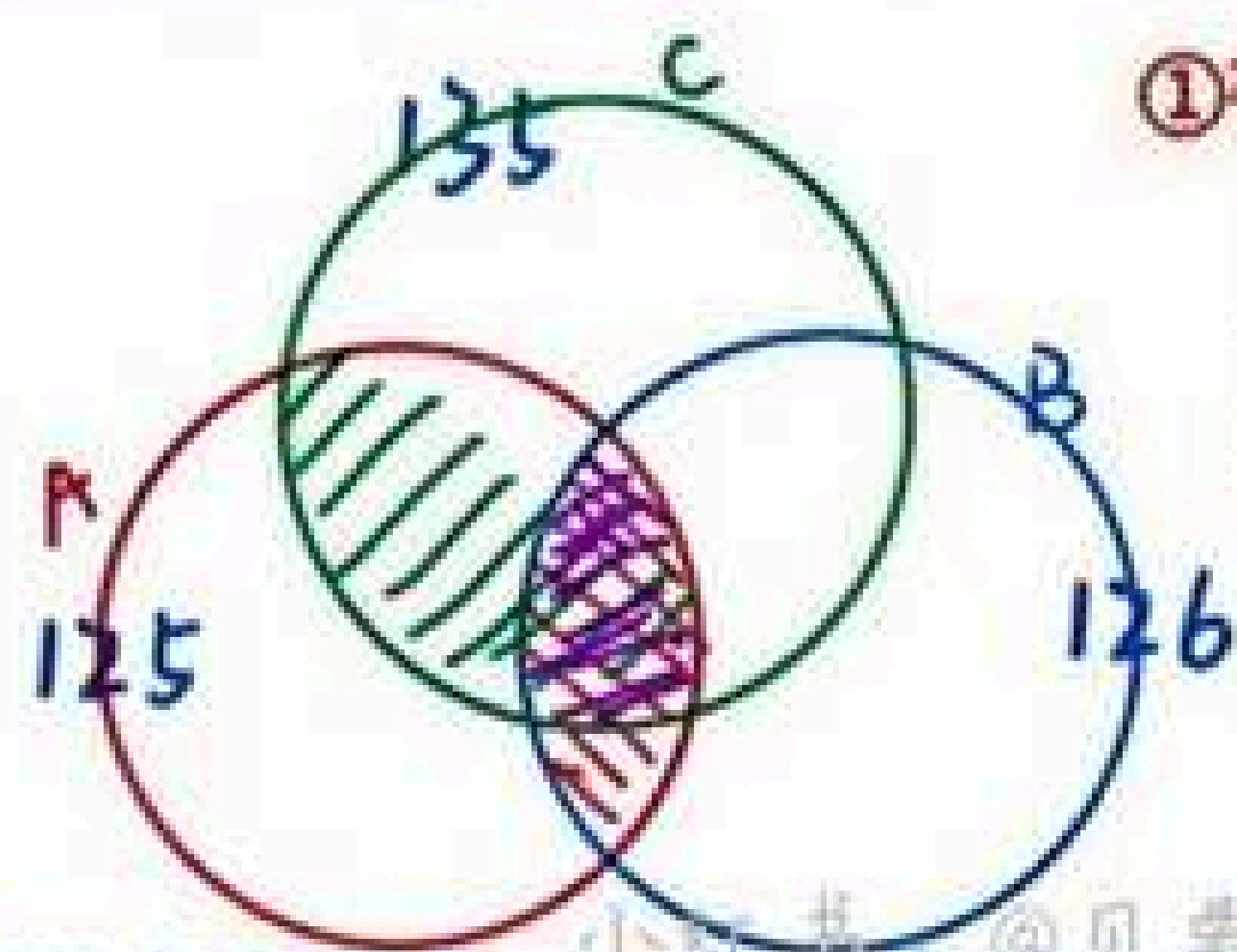
三集合标准型

【例4】(2020 新疆)某单位共有240名员工,其中订阅A期刊的有125人,订阅B期刊的有126人,订阅C期刊的有135人,订阅A、B期刊的有57人,订阅A、C期刊的有73人,订阅3种期刊的有31人,此外,还有17人没有订阅这三种期刊中的任何一种。问订阅B、C期刊的有多少人?

!一般尾数法

A. 57

B. 64



①标准型

$$A+B+C-A \cap B-A \cap C-B \cap C+A \cap B \cap C = \text{总} - \text{都不}$$

尾数法

得??=4

B

$$6 - 0 - ?? + 1 = 0 - 7$$

三集合非标准型

【例5】(2019 河北)某班参加学科竞赛人数40人,其中参加数学竞赛的有22人,参加物理竞赛的有27人,参加化学竞赛的有25人,只参加两科竞赛的有24人,参加三科竞赛的有多少人?

!可以得到都不=0

A. 2

B. 3

C. 5

D. 7

②非标准型 $A+B+C - \text{满足两项} - \text{满足三项} \times 2 = \text{总} - \text{都不}$

$$22+27+25-24-2x=40-0$$

$$\text{得} x=5$$

三集合非标准型变形

【例7】(2025 江苏)某单位组织45名员工参观第十五届中国国际航空航天博览会。其中,21人参观了新一代隐身战斗机歼-35A,22人参观了嫦娥六号取回的月背月壤样品,19人参观了大型无人机战舰“虎鲸”。所有员工中,这三种展览都未参观的有5人,至少参观两种的有12人,则这三种展览都参观的有()。

A. 7人

B. 8人

C. 9人

D. 10人

$$A+B+C - (\text{至少满足两个条件}) - \text{满足三项} = \text{总} - \text{都不}$$

$$21+22+19-12 - \text{满足三项} = 45-5$$

$$\text{满足三项} = 10$$

特征: 至少满足两个条件=满足两个条件+满足三个条件

$$A+B+C - \text{满足两项} - \text{满足三项} \times 2 = \text{总} - \text{都不}$$

$$A+B+C - \text{满足两项} - \text{满足三项} - \text{满足三项} = \text{总} - \text{都不}$$

$$A+B+C - (\text{满足两项} + \text{满足三项}) - \text{满足三项} = \text{总} - \text{都不}$$

$$A+B+C - (\text{至少满足两个条件}) - \text{满足三项} = \text{总} - \text{都不}$$

三、画图法

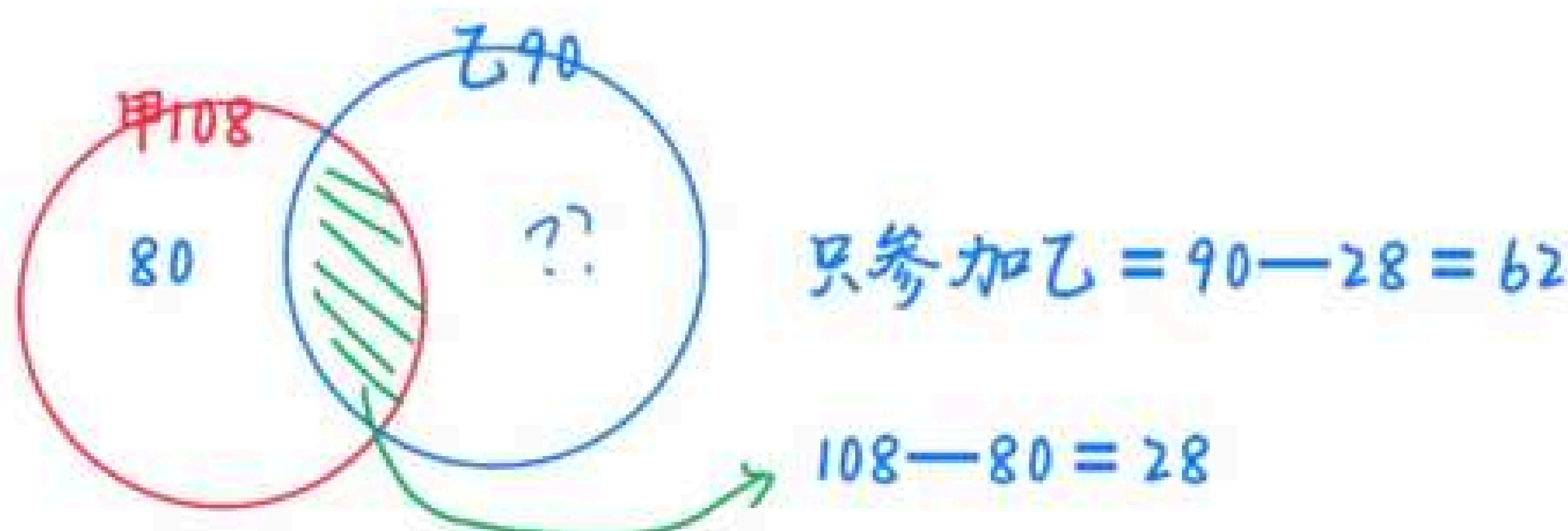
特征：只参加A；参加A但不参加B；
或者缺少代公式必要的的数据

画图法：三步走

- 第一步，画圈圈
- 第二步，标数字(从里到外，注意去重)
- 第三步，列算式

【例8】(2024 江苏)某基层工会共有180名会员，举行甲、乙两项工会活动，60%的会员参加甲活动，50%的会员参加乙活动，若只参加甲活动的会员有80人，则只参加乙活动的会员有()。

- A. 10 人
B. 28 人
C. 62 人
D. 90 人



四、容斥原理结合不定方程(最值)



来源于小红书@贝栗子

问法：求最值(求至少/至多..)

方法：此消彼长

【例11】(2021 四川)为实现产业振兴，农科院对某县的所有自然村进行了调研，结果发现，适合种植A作物的自然村占 $\frac{4}{13}$ 。适合种植B作物的自然村有25个，同时适合种植两种作物的自然村占总数的 $\frac{1}{14}$ ，则在该县，不适合种植两种作物的自然村至少有多少个？

- A. 57
B. 67
C. 114
D. 134

可以得到自然村的总数——13的倍数且14的倍数 设为 $182x$

$$A: 182x \times \frac{4}{13} = 56x$$

$$A \cap B: 182x \times \frac{1}{14} = 13x$$

两集合公式:

$$56x + 25 - 13x = 182x - y$$

$$\text{得 } 139x = 25 + y$$

所以 $x=1$ 时 $y=114$

五、容斥原理和周期结合

求 A 、 B 、 $A \cap B$ ----方法：利用容斥公式、编号1-100, 3的倍数, 5的倍数

【例12】(2018 山东选调)某高校举办春季运动会,共有1000名学生报名参加竞赛项目。为从运动员中选拔人员参加开幕式和闭幕式队列,现把所有运动员从1到1000进行编号,选出编号为3的倍数的运动员参加开幕式队列,而编号为7的倍数的运动员参加闭幕式队列。

问: 既不参加开幕式队列也不参加闭幕式队列的运动员有多少人?

A. 428

B. 475

C. 525

D. 572

既参加开幕式,也参加闭幕式: 21的倍数

开: $1000 \div 3 = 333 \text{组} \dots 1$

闭: $1000 \div 7 = 142 \text{组} \dots 6$

开闭: $1000 \div 21 = 47 \text{组} \dots 13$

所以 $333 + 142 - 47 = 1000 - \text{都不}$
得都不 = 572

思维导图



第九章 等差等比问题

一、等差数列

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, d 表示等差数列的公差

通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$, d 表示等差数列的公差

性质: ① $a_n = a_m + (n-m)d$ ② $a_n - a_m = (n-m)d$

求和 $\begin{cases} S_n = a_{\text{中}} \times n = \text{平均数} \times n \\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \end{cases}$

中位数 $\begin{cases} \text{数列为奇数项时, 第 } a_{\text{中}} \text{ 项真实存在;} \\ \text{数列为偶数项时, 第 } a_{\text{中}} \text{ 项可看成是中间两项。} \end{cases}$

技巧 $\begin{cases} (1) \text{求和有中项, 优先用中项。} S = a_{\text{中}} \times n, \text{可做可猜。} \\ (2) \text{无中项, 用 } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \\ (3) \text{常考: 3项等差 } (S_3 = 3 \times a_2), \text{ 5项等差、7项等差、9项等差。} \\ (4) a_1, a_2, a_3 \text{ 既是等差又是等比, 那么 } a_1 = a_2 = a_3 \text{ (常数数列)} \end{cases}$

等差数列和时间段 $\begin{cases} \text{① 各项成等差数列, 可推知每个“时间段”} \\ \text{的和也成等差数列} \\ \text{② 常考: 一个星期7天, 十几五规划5年} \end{cases}$

等差数列巧求方程组两数差 $\begin{cases} x+y=M \text{ ①} \\ ax+by=N \text{ ②} \end{cases} \text{ 求 } x-y \begin{cases} \text{① 找 } a, b \text{ 中位数 } g \\ \text{② 求 } gx+gy=Q \text{ ④} \\ \text{③ 式子②和④相减得 } x-y \end{cases}$

64的秘密 $\begin{cases} \text{挑挑拣拣, 剩下的数: 64 (剥洋葱)} \\ \text{每次都是剩下偶数, 故应该为 100 以内 2 的最大幂次数, 即为 } 2^6 = 64 \end{cases}$



来源于小红书@贝栗子

小红书: @贝栗子

小红书: @贝栗子

【例2】(2024 江苏) 已知某家族中 4 位成员的年龄总和为 142 岁, 且他们的年龄恰好成

等差数列, 若其中一位的年龄为 47 岁, 则这 4 人中最年长者的年龄为 ()。

A. 65 岁

B. 70 岁

C. 83 岁

D. 90 岁



$$\frac{a_2 + a_3}{2} = 35.5 \Rightarrow a_2 = 24$$

$$S_4 = a_{\text{中}} \times 4 = 142$$

$$a_{\text{中}} = 35.5$$

因为都是整数且 $+d$

所以 47 只能是 a_3

$$d = 47 - 24 = 23$$

$$\text{所以 } a_4 = 47 + 23$$

等差数列求和

【例4】(2022 联考)某市对下辖9个文艺表演团体去年新创节目的数量进行统计分析,发现9个团体新创节目的数量恰好成等差数列,其中前5个团体的新创节目总数是60,前7个团体的新创节目总数是70。那么这9个文艺表演团体去年新创节目的总数是:

A. 72

B. 76

C. 78

D. 80

$$\text{已知 } S_5 = 60 = a_3 \times 5 \quad \text{得 } a_3 = 12$$

$$S_7 = 70 = a_4 \times 7 \quad \text{得 } a_4 = 10$$

可以推出 $a_5 = 8$

$$\text{所以 } S_9 = a_5 \times 9 = 8 \times 9 = 72$$

方法二:

$$S_9 = a_5 \times 9$$

是9的倍数
秒A

等差数列和时间段等差数列

【例9】(2023 国考)工厂从某周第一天开始生产某种零件,每周生产7天,从第二天开始每一天都比前一天多生产200件。已知工厂第三周的产量是第一周的2倍,问第几天其日产量第一次达到1万件?

A. 37

B. 38

C. 39

D. 40

(a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7)

$$S_{\text{第一周}} = a_4 \times 7$$

(a8 a14)

$$S_{\text{第二周}} = a_{11} \times 7$$

(a15 a21)

$$S_{\text{第三周}} = a_{18} \times 7$$

$$\text{根据① } a_{18} \times 7 = 2 \times a_4 \times 7$$

$$\text{得 } a_{18} = 2a_4 \rightarrow a_1 + 17d = 2(a_1 + 3d) \rightarrow \text{得 } a_1 = 2200$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2000 + 200n \geq 10000 \quad \text{得 } n \geq 40$$

等差数列的应用题

①特定表述

②既构成等差数列,又构成等比数列,此数列为常数列



来源于小红书@贝栗子

【例10】(2025 天津)某种商品今年1月的定价为1000元/吨,2月起由于每月原材料上涨导致每月成本增加20元/吨,3月、6月、9月、12月每月初定价在上月基础上向上调50元/吨。则本年度利润最高的月份和最低的月份分别是:

A. 3月、10月

B. 3月、11月

C. 4月、10月

D. 4月、11月

! 没说就是不变

	1月	2月	3月	4月		10月	11月
定价	1000	1000	1050	1050		不变	不变
成本	x	+20	+20	+20		+20	+20

3月4月:定价相同,成本增加则利润↓
则3月利润 > 4月 CD ×

10.11月:同理,定价相同成本增加
利润↓ A ×

等差数列巧求方程组两数差

【例 12】(2022 江苏) 某餐饮公司甲、乙两种外卖每份的售价分别为 30 元和 50 元, 若该公司某天售出这两种外卖共 500 份, 销售收入为 21400 元, 则售出的两种外卖数量相差:

- A. 140 份
B. 160 份
C. 180 份
D. 200 份

设甲 x 份, 乙 y 份

$$x + y = 500 \quad (1)$$

$$30x + 50y = 21400 \quad (2)$$

$$(1) \times 40 - (2): 10x - 10y = -1400$$

$$x - y = -140 \quad \text{--- A}$$

小红书: @贝栗子



来源于小红书@贝栗子

64 的秘密

挑挑拣拣, 剩下的数: 64 就像剥洋葱, 偶中偶 100 以内, 最内层的偶数

每次都是剩下偶数, 故应该为 100 以内 2 的最大幂次数, 即为 $2^6=64$ 。

【例 13】(2024 浙江) 某工厂有 100 个零件, 从 1-100 编号后将编号为奇数的零件拿掉, 余下 50 个零件按顺序重新从 1 开始编号后将编号为奇数的零件拿掉, 重复上述操作直到剩下一个零件, 那么余下这个零件最初的编号是多少?

A. 32

B. 50

C. 64

D. 100



来源于小红书@贝栗子

小红书: @贝栗子

二、等比数列

通项公式: $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, q 表示等比数列的公比

求和公式: $S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

等比数列考查频率较低, 不会用公式, 就枚举一下, 一样拿分。

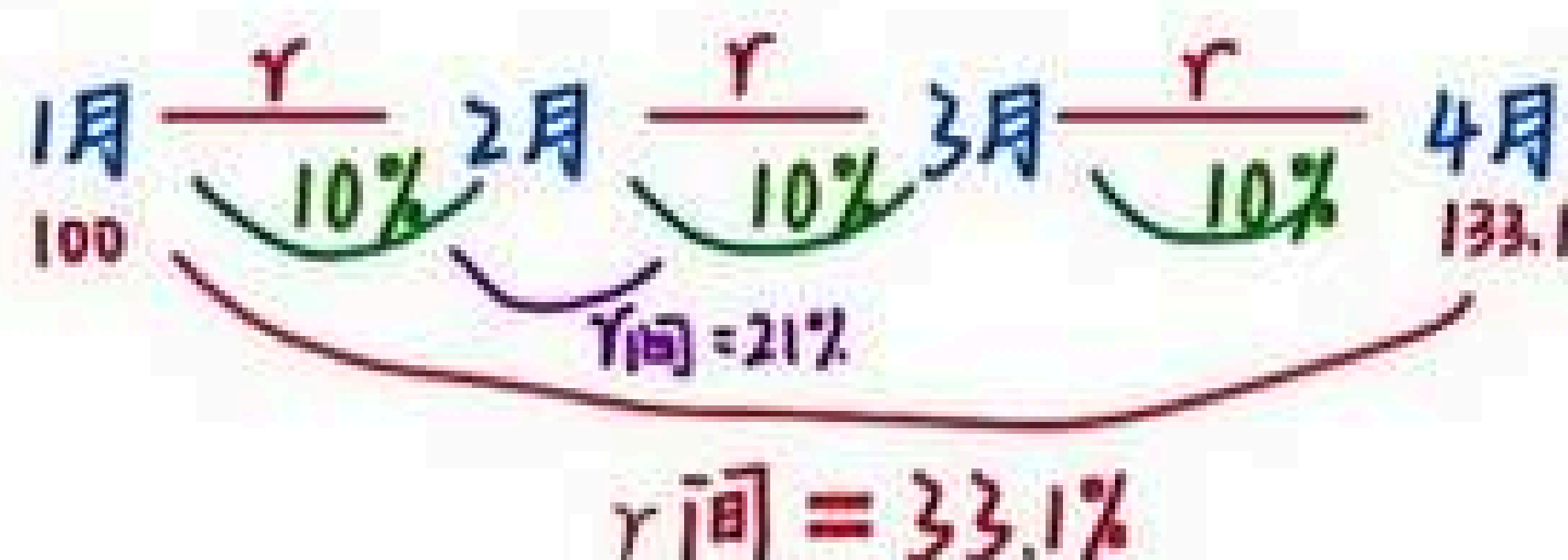
【例 14】(2023 联考) 某口罩生产车间一月份生产口罩 100 万包, 以后每个月都比前一个月按相同增长率增长, 四月份生产口罩 133.1 万包, 这个增长率是:

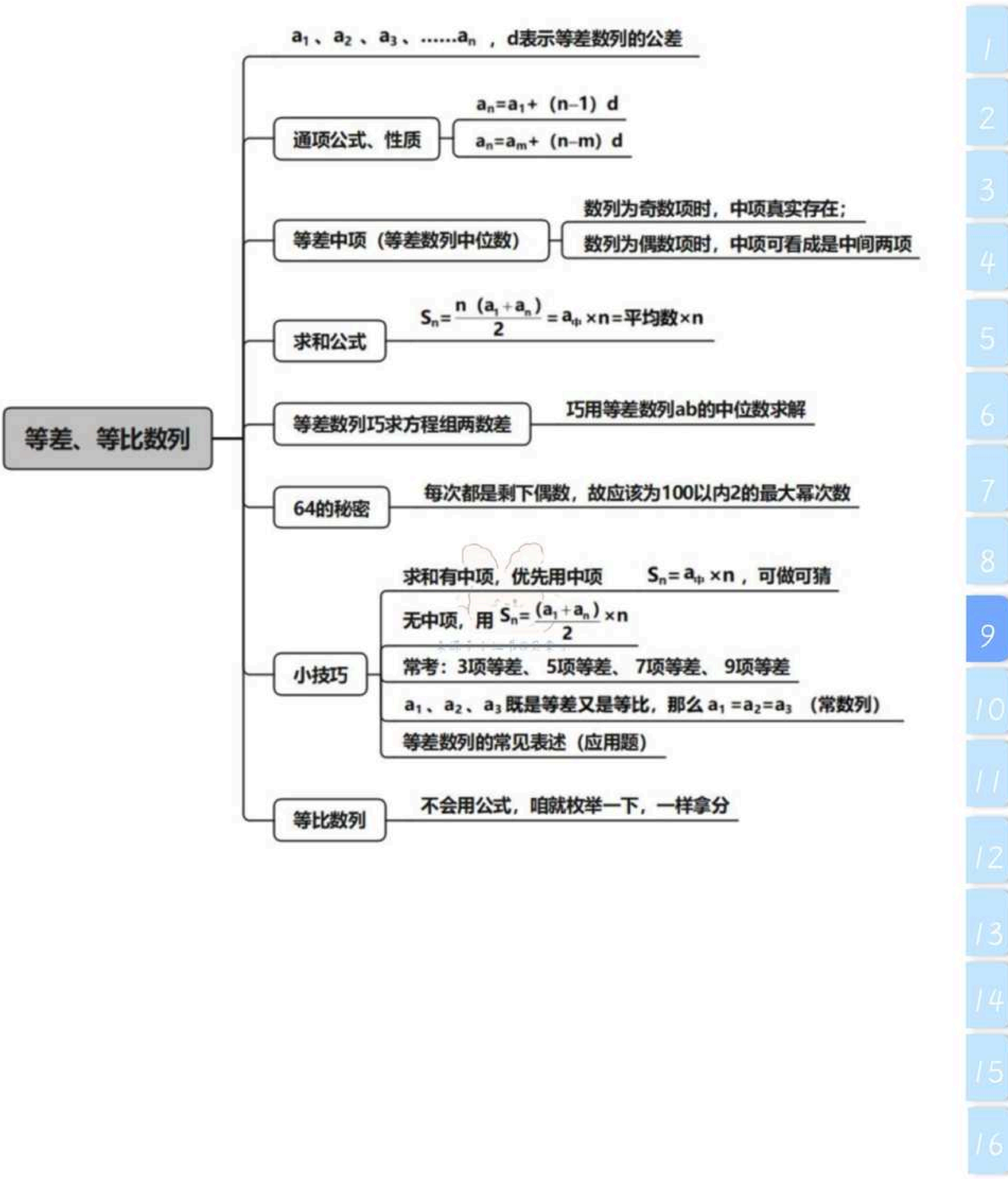
A. 10%

B. 8%

C. 6%

D. 5%





第十章 行程问题

一、基础行程

小红书：@贝栗子

普通行程

路程=速度×时间

$$S=V \times T$$

方法：画图展现行程过程，列式子求解。

注意

- ① 单位换算：1米/秒=3.6千米/时
- ② 只给时间或者给定速度比例可赋值

火车过桥

火车过桥

从开始进入隧道（桥）到车身完全驶出

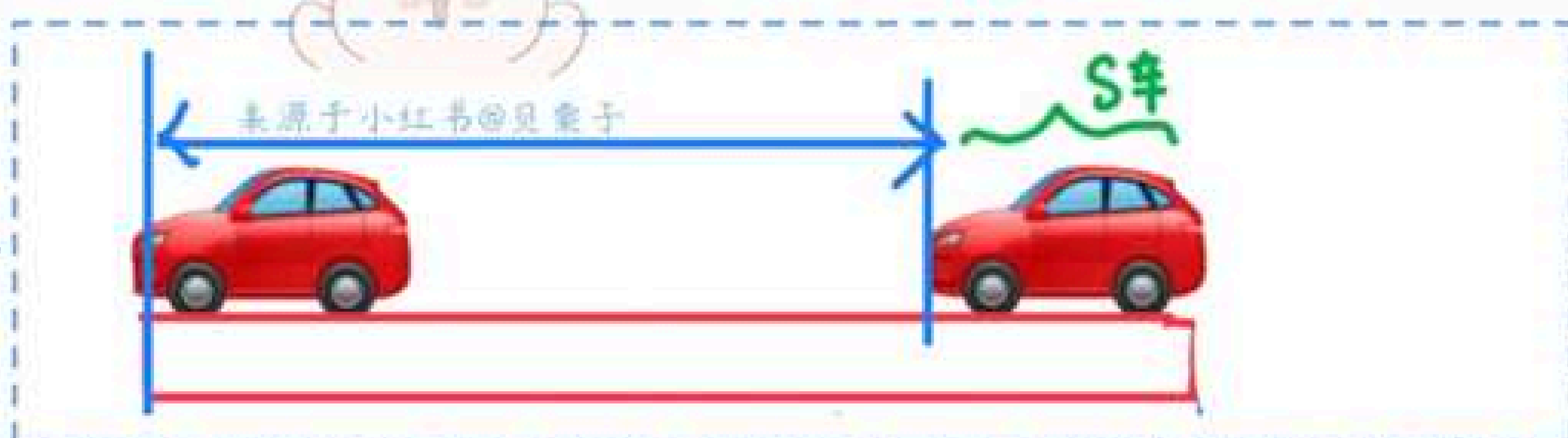
$$S_{\text{路程}} = S_{\text{桥}} + S_{\text{车}} = \text{火车速度} \times \text{过桥时间}$$



火车在桥

车尾进入到车头未露出，完全在隧道（桥）上

$$S_{\text{路程}} = S_{\text{桥}} - S_{\text{车}} = \text{火车速度} \times \text{过桥时间}$$



小红书：@贝栗子

匀加速

识别：匀减速、匀加速

$$\bar{V} = \frac{V_{\text{初}} + V_{\text{末}}}{2}$$

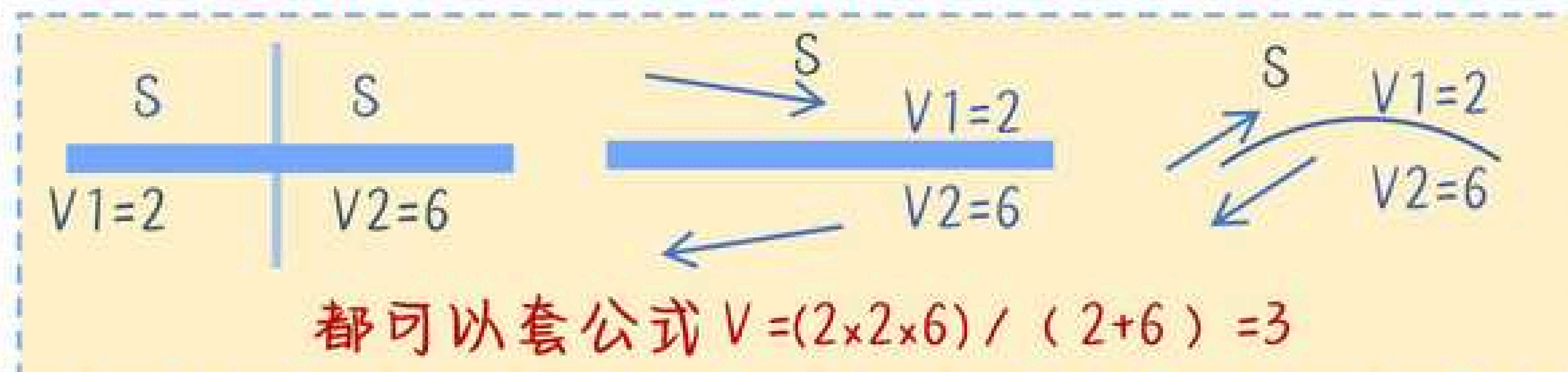
(新型热门考法)

等距离平均速度

判定：等距离、直线往返、上下坡往返、一半路程

$$\bar{V} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}$$

注：多个距离，多个速度，往返利用等距离平均速度（多次用）



火车过桥问题

【例3】(2025 江苏)引导车引导运输车队前往某地,途经一座桥梁和一个隧道,引导车与运输车队速度一致,引导车的长度忽略不计。匀速通过800米长的桥梁,引导车需36秒,运输车队需45秒。通过隧道时车速比通过桥梁时下降25%,若引导车需60秒,则运输车队需:

- A. 69秒
B. 70秒
C. 72秒
D. 75秒
- ①引导车: $s = VT$ 得 $800 = V \times 36$ 得 $V = \frac{200}{9}$ (引导车和运输车速度一样)
②对于运输车来说,属于火车过桥: $800 + s_{\text{运}} = \frac{200}{9} \times 45 = 1000m$ 得 $s_{\text{运}} = 200m$
隧道: ③速度下降20%, 即 $V = \frac{200}{9} \times (1 - 25\%) = \frac{50}{3}$
④引导车需要60s, 则 $s_{\text{隧道}} = \frac{50}{3} \times 60 = 1000$
⑤运输车 $s_{\text{隧道}} + s_{\text{车}} = 1000 + 200 = \frac{50}{3} \times T$ 得 $T = 72$

引导车 运输车
引导车就像蚂蚁
运输车属于过桥问题

匀加速(热门考法)

小红书: @贝栗子

【例5】(2025 联考)小张和小赵分别从甲、乙两地同时出发前往对方的出发地。小张出发时的速度是小赵的一半,两人匀速行进1小时后迎面相遇。此后小张开始均匀加速,最终比小赵晚到达1小时。问小张到达时的速度是小赵到达时速度的多少倍?

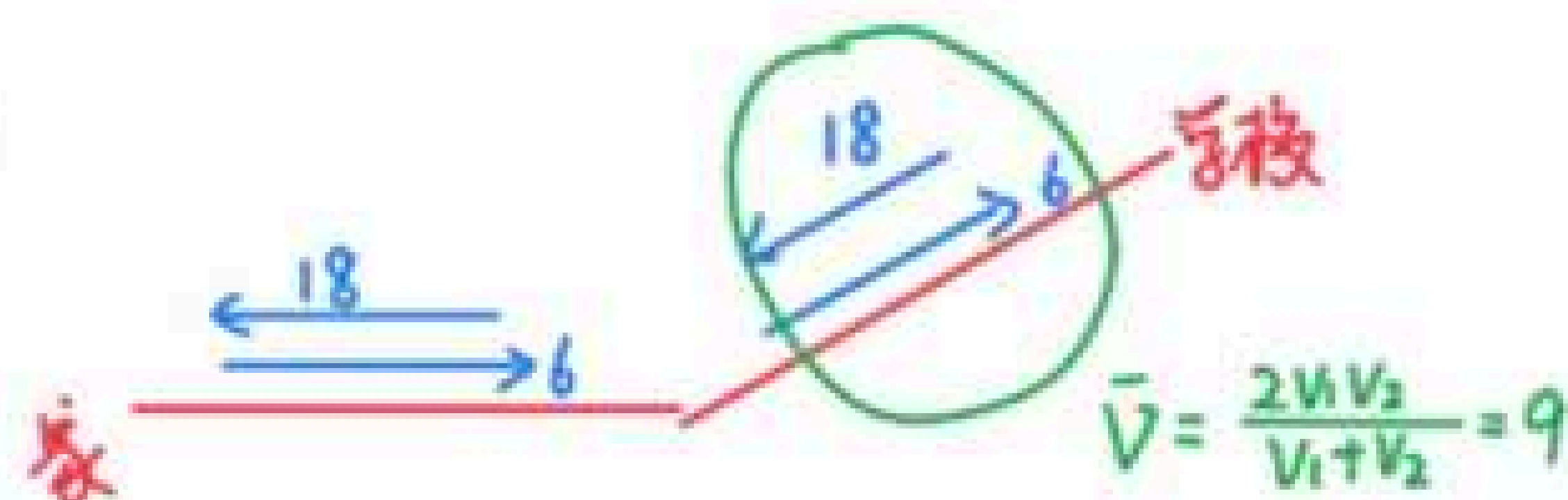
- A. $\frac{5}{3}$
B. $\frac{7}{3}$
C. $\frac{5}{6}$
D. $\frac{7}{6}$
- ② $s_{\text{张}} = 1 \times 1 = 1$
③ $s_{\text{甲丙}}: s = 1$
 $V_{\text{赵}} = 2$
所以 $T = 0.5$
④ $s_{\text{赵}} = 2 \times 1 = 2$
⑤ $T = 1.5, s = 2$ 所以 $V = \frac{4}{3}$
⑥ 所以到达乙时 $V_{\text{末}} = \frac{5}{3}$
⑦ ①设出发时 $V_{\text{张}} = 1$ $V_{\text{赵}} = 2$
④所以小张全程时间为后半部分 + 前半部分 = $(0.5 + 1) + 1 = 2.5$
小赵全程时间为 $1 + 0.5 = 1.5$
⑥ $\frac{V_{\text{张}}}{V_{\text{赵}}} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$

给的都是时间,而给的速度是比例,问的还是速度,所以可以赋值。

等距离考法

【练习9】(2020 联考)小明每天从家中出发骑自行车经过一段平路,再经过一道斜坡后到达学校上课。某天早上,小明从家中骑车出发,一到校门口就发现忘带课本,马上返回,从离家到赶回家中共用了1个小时,假设小明当天平路骑行速度为9千米/小时,上坡速度为6千米/小时,下坡速度为18千米/小时,那么小明的家距离学校多远?

- A. 3.5千米
B. 4.5千米
C. 5.5千米
D. 6.5千米

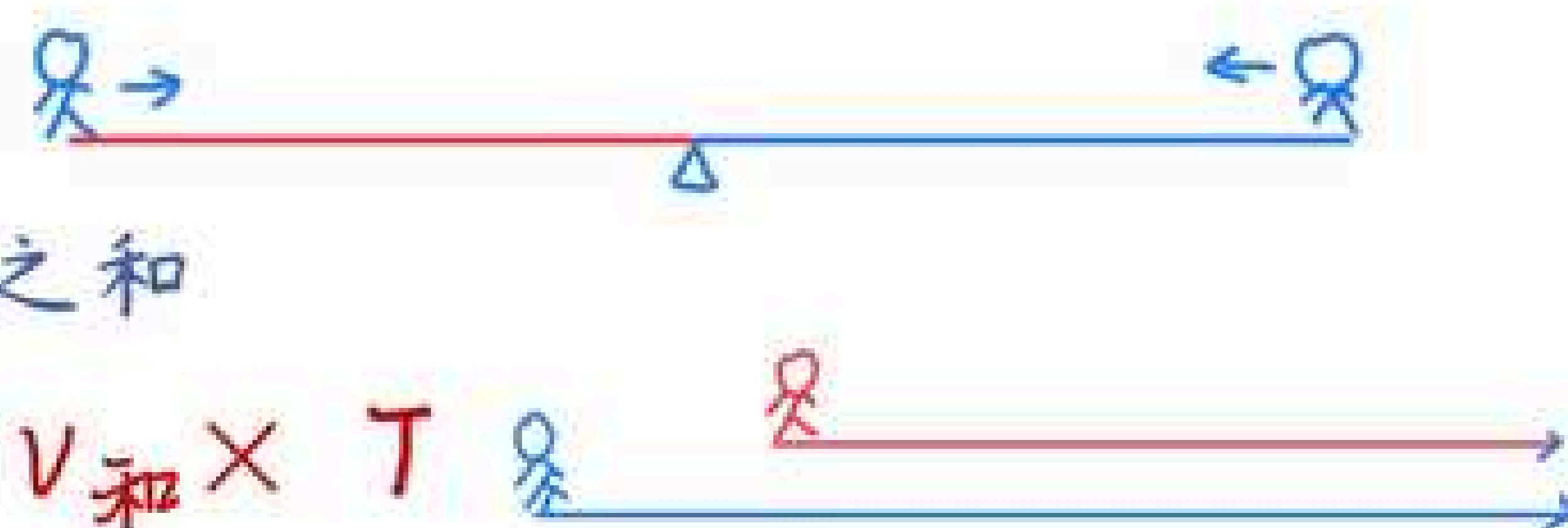


二、相对行程

相遇及
追及

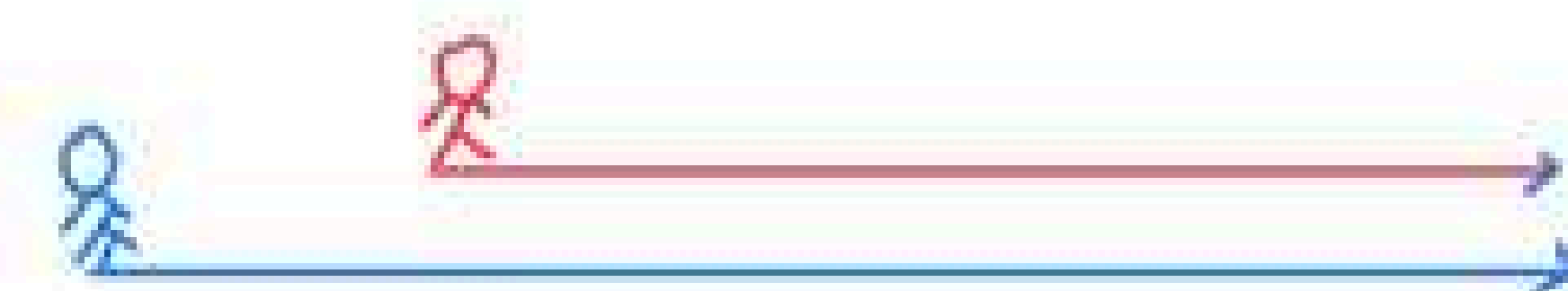
直线相遇:

同时相向而行

 $S_{相遇}$: 就是两人走的路程之和公式: $S_{相遇} = (V_1 + V_2) \times T = V_{和} \times T$ 

直线追及:

同时同向而行

 $S_{追及}$: 即追及刚开始时两人相差的距离 (多跑的距离)公式: $S_{追及} = (V_1 - V_2) \times T = V_{差} \times T$ 

环形相遇

同点相向出发

公式: $S_{和} = V_{和} \times T_{遇}$ 相遇 1 次, $S_{和} = 1$ 圈, 相遇 N 次, $S_{和} = N$ 圈

本质: 每一次相遇到下一次相遇期间, 两人走的路程和是一圈

不同点相向出发: 第一次相遇 300, 第二次相遇 $300 + 400$, 第三次相遇 $300 + 400 + 400$ 

环形追及

同点同向出发

公式: $S_{差} = V_{差} \times T_{追}$ 追上 1 次, $S_{差} = 1$ 圈。追上 N 次, $S_{差} = N$ 圈

本质: 每一次追上到下一次追上期间, 两人走的路程差是一圈。

不同点同向出发: 第一次追上 100, 第二次追上 $100 + 400$, 第三次追上 $100 + 400 + 400$ 

套了一圈

两端出发多次相遇:

第一次相遇, 共走 $1S$, 第二次相遇, 共走 $3S$ 第 n 次相遇, 共走 $S_{和} = (2n - 1)S = (V_1 + V_2) \times T$

同端出发多次相遇:

第一次相遇, 共走 $2S$, 第二次相遇, 共走 $4S$ 第 n 次相遇, 共走 $S_{和} = 2nS = (V_1 + V_2) \times T$

流水行船

 $V_{顺} = V_{船} + V_{水}$ $V_{逆} = V_{船} - V_{水}$ $V_{船} = \frac{(V_{顺} + V_{逆})}{2}$ $V_{水} = \frac{(V_{顺} - V_{逆})}{2}$ 静水时速度-- $V_{船}$ 漂流速度-- $V_{水}$ 

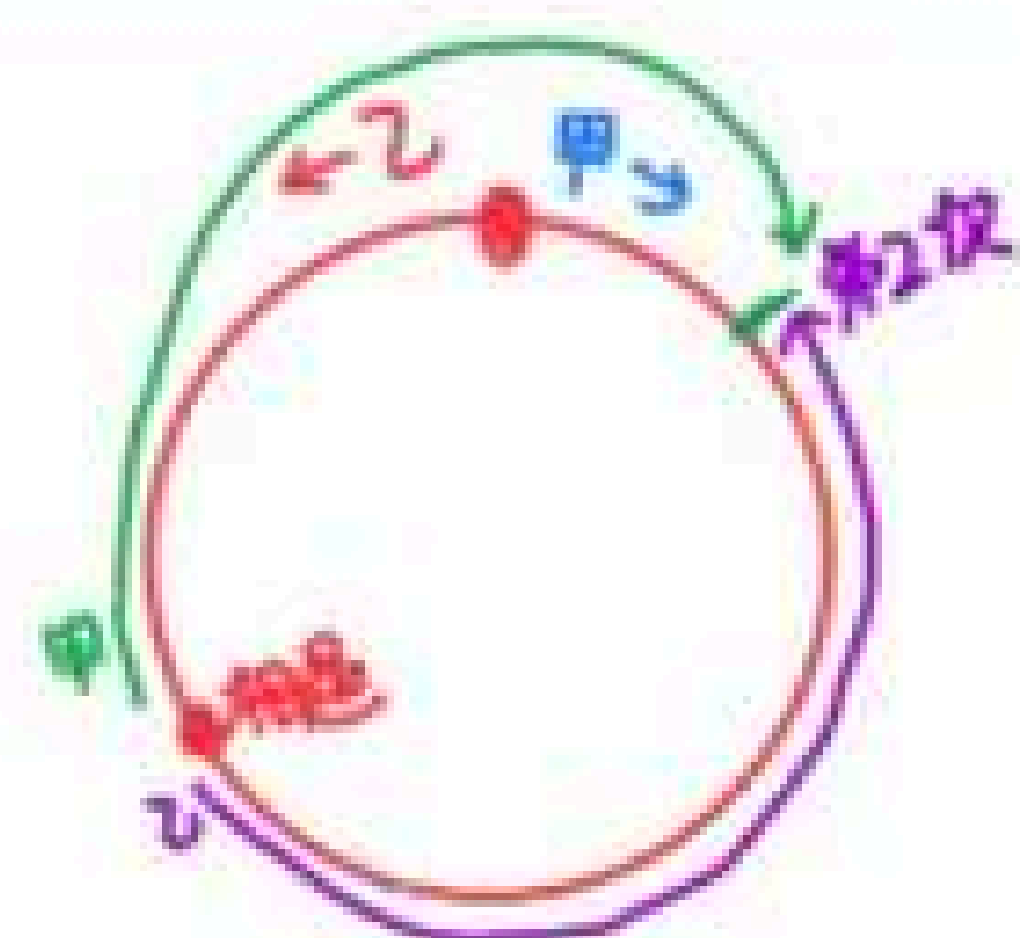
比例行程

 $S = VT$ 找相等的量, 看比例, 找份数(1) S 相等, VT 成反比(2) V 相等, ST 成正比(3) T 相等, SV 成正比

环形相遇

【例9】(2025 国考)甲和乙从环形跑道的同一点出发,向相反方向匀速慢跑,乙的速度是甲的一半。两人3分钟后第一次相遇,此后乙加速又跑了正好半圈后和甲第二次相遇。问两人第一次到第二次相遇间隔了多长时间?

- A. 2分10秒
B. 2分15秒
C. 2分20秒
D. 2分30秒



根据 $S - \text{圈} = V_{\text{和}} T = (1+2) \times 3 = 9$

则即乙走了三分之一,甲走三分之二

乙加速跑半圈又相遇,说明甲也跑了半圈

$V_{\text{甲}} = 2 \quad V_{\text{乙}} = 2$ (相同时时间相同半圈)

所以 $T = S \div V_{\text{和}} = 9 \div 4 = 2\text{分}15\text{秒}$

多次相遇

【例11】(2020 联考)小王在甲医院,小赵在乙医院。两人从所在医院同时骑车出发,来回往返于两个医院之间。已知小王骑车速度为205米/分钟,小赵骑车速度为225米/分钟,且经过12分钟后两人第二次相遇。问两家医院相距多少米?

- A. 1290
B. 1720
C. 2150
D. 2580

共走了 $2(n-1)S = 2(2-1)S = V_{\text{和}} \times t = (205+225) \times 12$



来源于小红书@贝栗子

流水行船

【例13】(2020 联考)一艘轮船顺流而行,从甲地到乙地需要6天;逆流而行,从乙地到甲地需要8天。若不考虑其他因素,一个漂流瓶从甲地到乙地需要多少天?

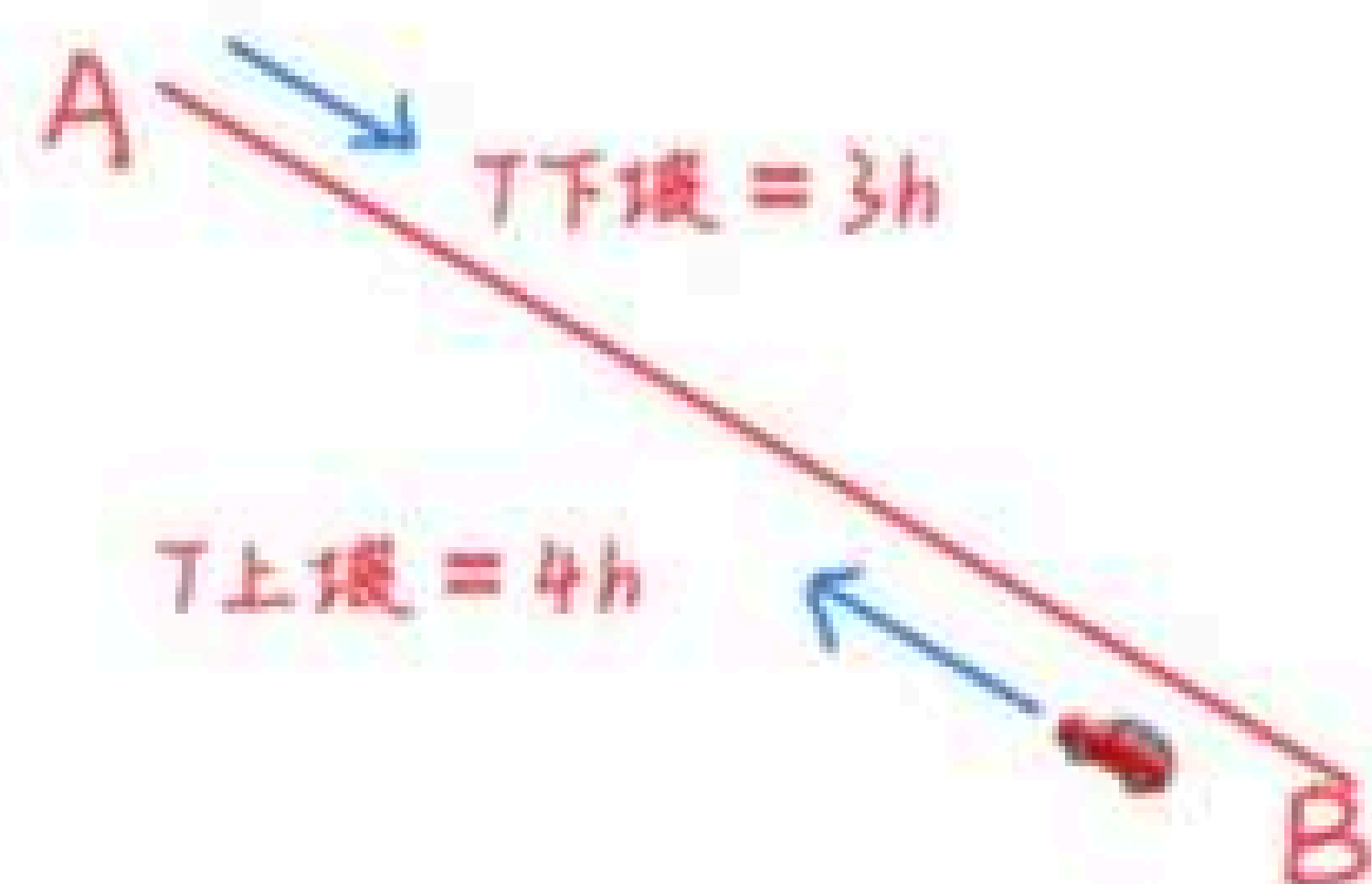
- A. 24
B. 36
C. 48
D. 56

	S	$=$	V	$\times$	T	
顺差	24		4	$\leftarrow$	6	通过 $V_{\text{顺差}}$ 和 $V_{\text{逆差}}$
逆差	24		3	$\leftarrow$	8	得 $V_{\text{水}} = \frac{4-3}{2} = 0.5$
漂流	24		0.5		48	

比例问题

【练习11】(2023 北京)从A地到B地是下坡路,一辆车从A地开往B地需要三小时,从B地开往A地需要四小时。已知这辆车下坡速度比上坡速度快15千米/小时,则A、B两地之间的距离是多少千米?

- A. 120
B. 180
C. 240
D. 300

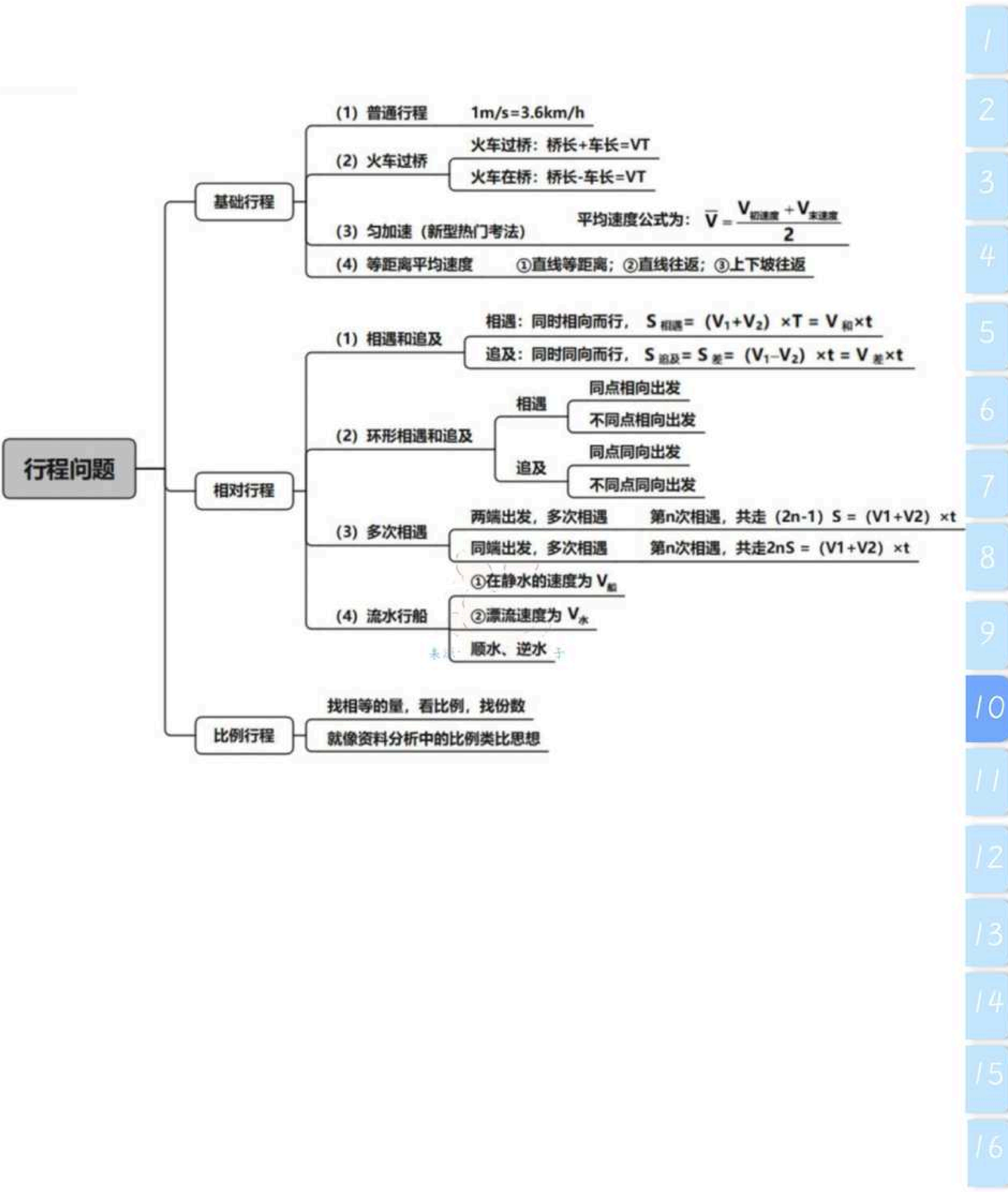


根据题意知道路程一样
速度和时间成反比

$$\frac{T_{\text{下}}}{T_{\text{上}}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_{\text{下}}}{V_{\text{上}}} = \frac{4}{3}$$

即1份 = 15千米/时

所以 $S = VT = 15 \times 4 \times 3 = 180$



第十一章 排列组合问题

分类与分步

- 分类：
 - 用加法（要么…要么…），（“或”的关系；多者选其一）
 - 相加→一步到位，拿出来哪一个都好使
- 分步：
 - 用乘法（先…后…/既…又…）（“且”的关系；同时满足）
 - 相乘→一步不好使，必须都完成

排列与组合

对结果有影响，与顺序有关（A）

对结果无影响，与顺序无关（C）



【判定标准】从选出的主体当中任意地挑出两个，调换顺序

公式：

- 排列 A_n^m = 从n开始往下乘m个数
- 组合 C_n^m = $\frac{\text{从n开始往下乘m个数}}{\text{从m开始往下乘m个数}}$

常用：凑12法 $A_5^5 \times A_4^4 \times A_3^3 \times A_2^2 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{12} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{12} \times \frac{3 \times 2}{12} \times 2$

$$\textcircled{1} A_5^1 = 5 \quad C_5^1 = 5$$

（没顺序可言）

$$\textcircled{2} C_3^3 = 1 \quad C_5^5 = 1$$

（都选择，只有一种可能）

$$\textcircled{3} C_7^2 = 21 \quad C_7^5 = 21$$

（上角数之和 = 下角数的两个组合数相等）

（例1）某风景区内有5个收费景点，门票分别为10元、10元、20元、20元、20元。老李花了40元购买门票，依次游览了不同景点。那么可能的游览方式有多少种？

A.6 B.18 C.24 D.60

①游览2个门票为20元的景点：

从3个门票为20元的景点中选出2个，考虑顺序有 $A_3^2 = 6$ 种情况；

②游览2个门票为10元的景点和1个门票为20元的景点：

先从3个门票为20元的景点中选择1个，有3种情况——再将2个10元门票的景点全部选出，有1种情况——最后将选出的3个景点进行排序，有 $A_3^3 = 6$ 种情况（分步用乘法，共有 $3 \times 6 = 18$ 种情况）

分类用加法，所求总情况数 = $6 + 18 = 24$ 种，



来源于小红书@贝栗子

分类思想

方法：(1) 正向思维：分类枚举情况数

(2) 反向思维：总情况数-不满足情况数

注：正向和反向哪种情况数少，就选择哪种方法

例子：A类水果(4种)，B类干果(3种)，上岸想吃4种，每类至少吃一种。

	A	B	
正向:	1	3	$C_4^1 C_3^3 = 4 \times 1 = 4$
	2	2	$C_4^2 C_3^2 = 18$
	3	1	$C_4^3 C_3^1 = 12$
	4	0	

} 34

反向: 只吃一种 $C_7^1 = 1$ 总数 = $C_7^4 = 35$
所以 $35 - 1 = 34$

枚举法



限制了条件，选项数据小，一一枚举，不重不漏。

注：枚举属于分类思想，这里选项数据小，枚举更直观

【例5】(2025 国考) 某竞赛由5道次序固定的判断题组成，参赛者起始为0分，每答对1题加1分，每答错1题扣1分。小王作答了所有试题，答完每道题时当前的得分都不低于1分。
前两道必对

问他的答题情况有多少种不同的可能?

- A. 7
- B. 6
- C. 4
- D. 3
- 1 2 3 4 5

✓ ✓ ✓ 2 2

 ✓ ✕ ✓ 2种

$2 \times 2 = 4$ 种

分类用加法

捆绑法

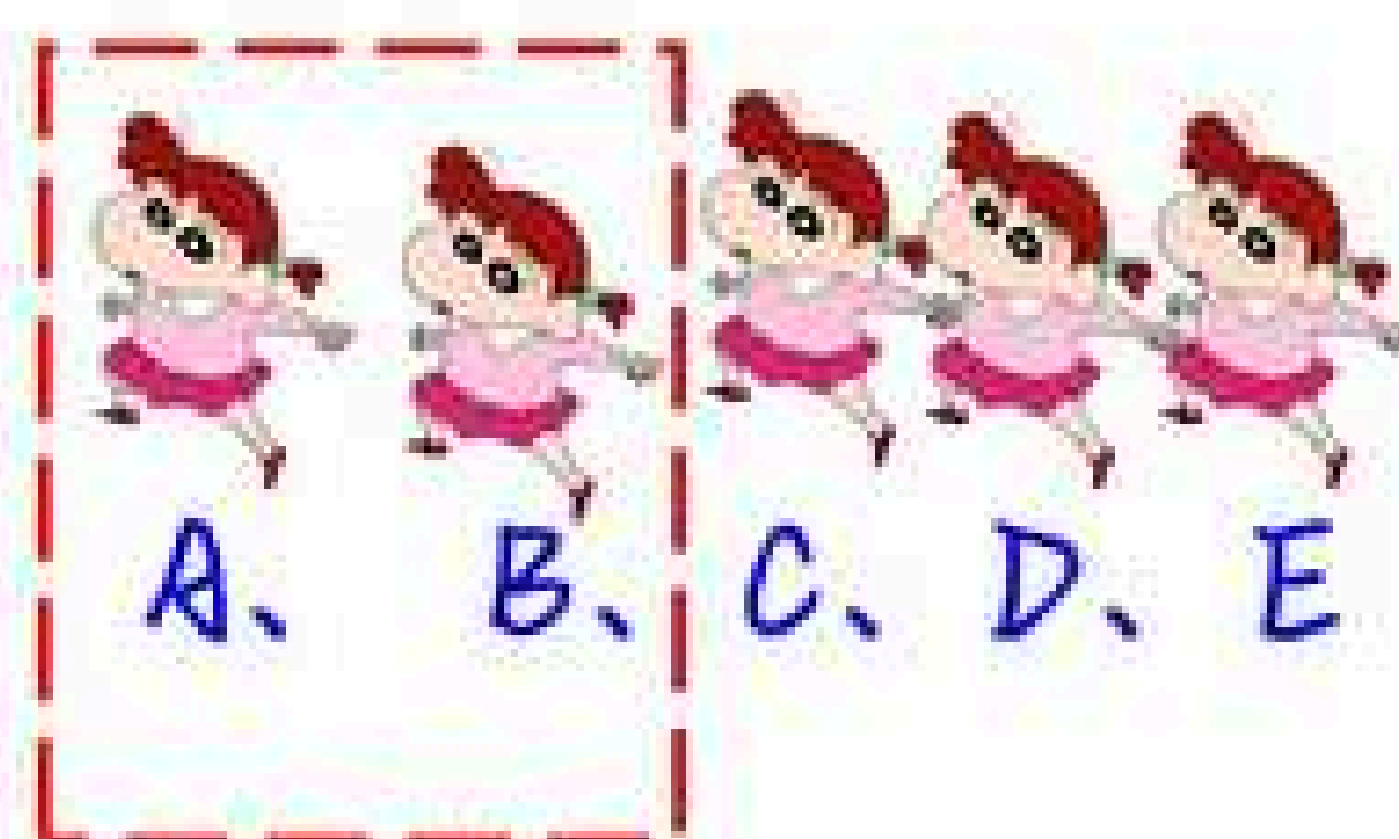
意思：要求一部分主体必须在一起，需要先将要求在一起的部分排列，然后视为一个主体，和其他主体排列

特征：要求相邻（在一起）

方法：先内部相邻小元素排列，再大主体排列。

例子：A、B、C、D、E 五个人站成一排照相，其中 A、B 相邻

怎么排，谁先拍对结果有影响，故排列 A
同时 A 和 B 人要站在一起，看成一体 A_2^2
然后四个部分再排 A_4^4



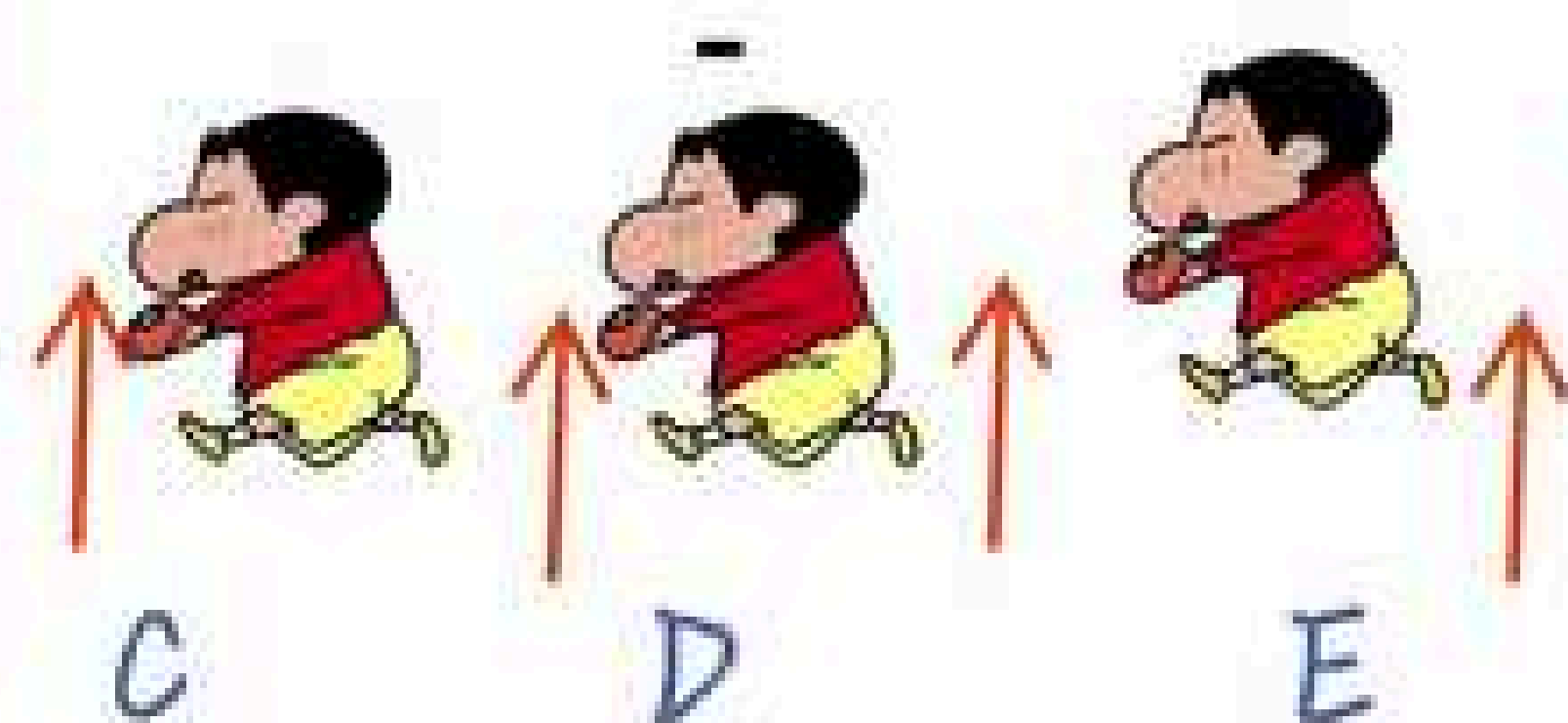
插空法

特征：要求不相邻（不在一起）

方法：（有空插空）
① **先排：**先安排其他可以相邻的元素，形成若干个空位；
② **再插：**将不相邻的元素插入到空位中。

例子：A、B、C、D、E 五个人站成一排照相，其中 A、B 不能相邻

先排 CDE 然后 A 和 B 插空（4 个空插 2 个人）



$A_3^3 \times A_4^2$

隔板法

N 个物品分给 M 人，每人至少分一个，N 个物品中有 (N-1) 个空，在空中插入 (M-1) 个板，共有 C_{N-1}^{M-1} 种情况

方法：空里插刀

考法：
1. 同素分堆
2. 不同素，分数量
3. 每人至少分 4 个，先每人 (n-1) 个

例：5 个雪糕分 3 个人，每人至少分一个。



C_4^2

人当做板，插 3 个板，有 4 个空

错位排列

错位重排 (避嫌原则)

特征: 不回归原位 (有 N 封信和 N 个信封, 每封信都不装进自己对应信封里)

方法: 记住基本的几个

方案数记作 D_n : $D_1=0$, $D_2=1$, $D_3=5$, $D_4=9$, $D_5=44$, $D_6=265$

【例 11】(2020 上半年事业单位) 某个为期 2 天的会议有 8 名发言人, 每人在每天都要发言 1 次。已知第 1 天的发言次序固定, 第 2 天要求仅有 3 名发言人的发言次序与第 1 天一样,

且另有 2 人正好交换发言次序, 问共有多少种不同的安排方式?

A. 不到 500 种

B. 500~1000 种之间

C. 1000~2000 种之间

D. 超过 2000 种

1 2 3 4 5 6 7 8
A B C D E F G H

① 3 个人不变 $C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ 分步乘法 $56 \times 10 \times 2 = 1120$

② 2 人交换 从剩下的 5 人选 2 个 $C_2^5 = 10$

③ 最后 3 个人 不一样 $\Rightarrow$ 错位原则 $\Rightarrow D_3 = 2$

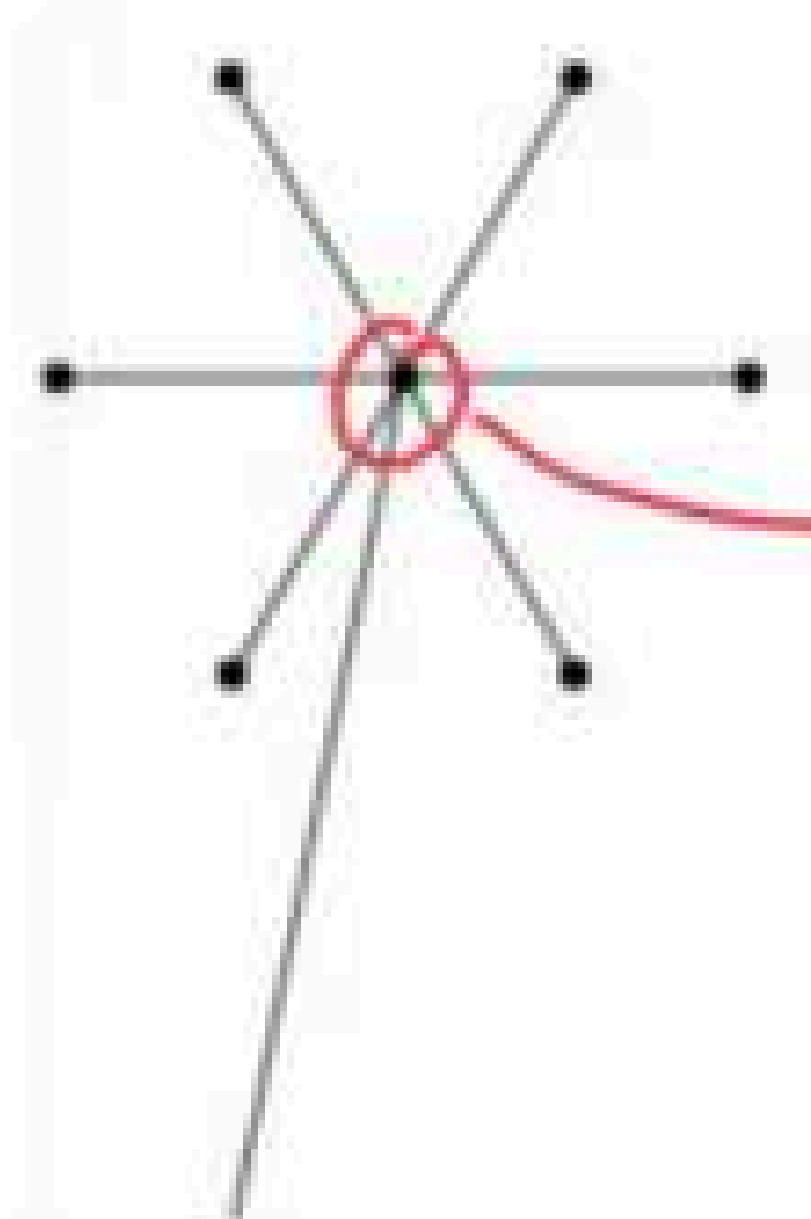


来源于小红书@贝栗子

环形排列

n 个人进行环形排列, 有 A_{n-1}^{n-1} 种排法

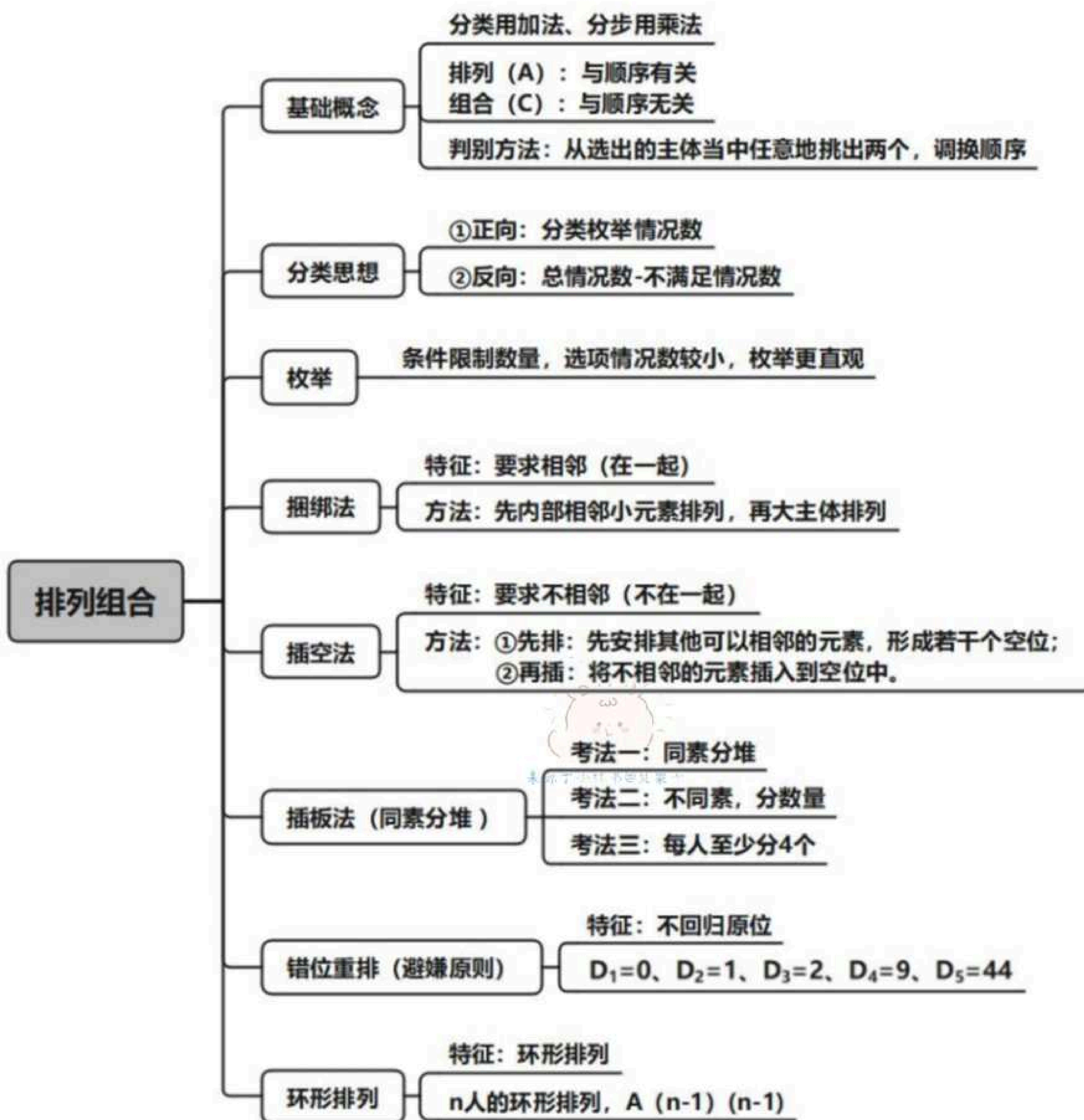
【例 12】(2025 上海) 甲参加公司团建, 其中一个项目就是做手工风车, 要将材料袋中的七个不同卡通头像贴在如图所示的七个圆点处。则做出来的风车一共的可能性有多少种?



中心 C = 7 种

外面的 6 个环形排列套公式
 $A_6^6 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

分步乘法 $7 \times 120 = 840$



第十二章 概率问题

情况求概率

正向思想：概率 = $\frac{\text{满足情况数}}{\text{总情况数}}$ (猜题思维：根据分母猜题)

反向思想：概率 = $1 - \text{不满足情况的概率}$

注意：可不可重复抽取

- 可重复 $n \times n \times n \times n \dots$
- 不可重复 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots$

可做可拆：1. 分母 2. 可能性大小
3. 选项设计（正反思维）-- 选项相加 = 1

【例2】(2025 联考) 某公司甲部门男性员工比女性多2人，乙部门女性员工比男性多

3人。已知甲、乙两部门女性员工共6人，问从甲、乙两部门中随机选出4人，恰好选到2名

男员工和2名女员工的概率是：关系很乱——列表呈现

A. $\frac{4}{11}$

B. $\frac{5}{11}$

C. $\frac{2}{33}$

D. $\frac{5}{66}$

	男	女
甲	$x+2$	x
乙	$3-x$	$6-x$
一共	5	6

符合条件
总情况数 $= \frac{C_5^2 C_6^2}{C_{11}^4} = \frac{5}{11}$

来源于小红书@贝栗子

给概率求概率

分类用加法： $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$

小红书：@贝栗子

分步用乘法： $P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_n$

注：残次品概率：赋值总量，求每个等级数量，再求每个等级残次品数量。

小技巧：论文、征文、试题打分类：抓住通过这个点，分类讨论

【例6】(2025 联考) 小王、小李参加某项知识竞赛答题，小王每题答对的概率相等，且

均为小李的1.5倍。已知小王连续答对2题的概率比小李高0.2，问小王前2题全对且小李前

2题全错的概率在以下哪个范围内？

A. 不到0.05

B. 0.05~0.08

C. 0.08~0.11

D. 0.11以上

	小李	小王
概率	P	$1.5P$
	0.4	0.6

根据① $(1.5P)^2 - P^2 = 0.2$
得 $P^2 = 0.16$ $P = 0.4$ 小李答错的概率0.6
所以 $0.6 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.6 = 0.1296$

猜题：

$\frac{60\%}{40\%} = \frac{0.6}{0.4}$

分类思想: 正反向思维

【例 8】(2025 联考) 某企业到 A 大学招聘, 小张、小李和小王 3 位毕业生前去应聘。若小张、小李 2 人中至少有 1 人签约的概率是 $\frac{3}{4}$, 小王签约的概率是 $\frac{1}{3}$, 那么 3 人中至少有 1 人签约该企业的概率是多少?

理解: 小张, 小李至少签一个, 小王签不签都没关系

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

正向思维: 至少一个 $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$
2个都是 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ $> \frac{5}{6}$
只有小王签

反向思维: 都不签的话 $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

所以 1 - 不满足 = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$



来源于小红书@贝栗子

几何思想

常考: 长度概率、面积概率

【例 11】(2025 浙江) 某商店门口排了一列 100 米长的直线队伍, 小明随机站在队伍的某处。小明的妈妈在队伍里随机找个位置喊小明的名字, 如果小明距离她不超过 25 米, 就能听到。问小明听到他妈妈呼喊的概率是多少?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

$$P = \frac{L^2 - (L-a)^2}{L^2} = \frac{100^2 - 75^2}{100 \times 100} = \frac{7}{16}$$

高中几何概率:

① 条件总长为 L

② 两人相距 $\leq a$

$|x-y| \leq a$

③ 满足条件概率为:

$$P = \frac{L^2 - (L-a)^2}{L^2}$$

跟屁虫问题

(不)跟屁虫问题：当考查只是两个人在一起(一排)求概率时：先放一个，再放另一个

方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{先放一个} \text{ --- 任意放 (概率为1)} \\ \text{再放另一个} \text{ ---- 从剩下的情况中选满足情况} \end{array} \right.$

多人(3)在一起(一排)求概率，跟屁虫问题，需要依次进行

【例 12】(2021 联考)两个大人带四个孩子去坐只有六个位置的圆型旋转木马，那么两个

大人不相邻的概率为：

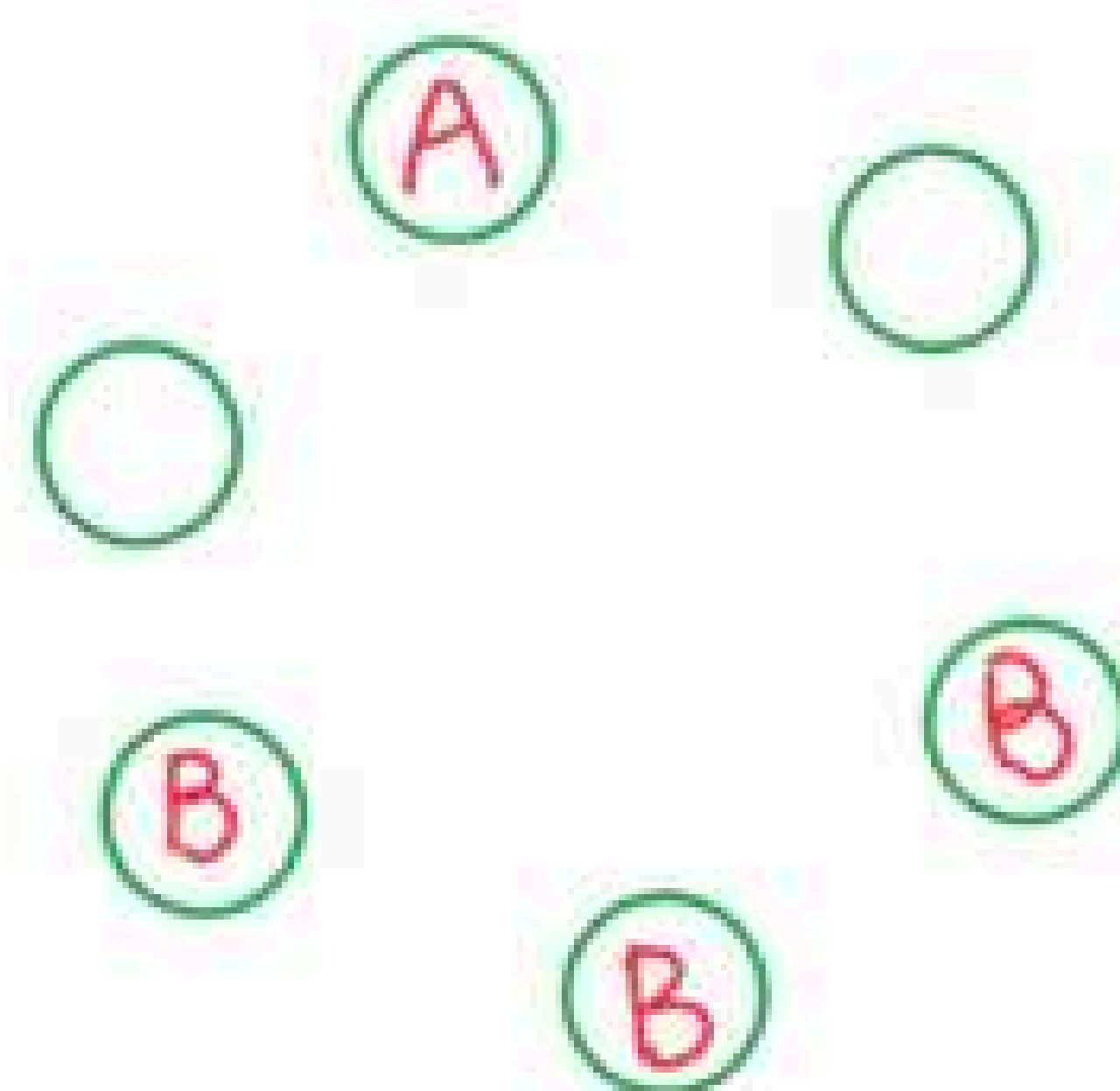
A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

①先放大人A 大人B 要不相邻只能有3个选择
大人B 从剩下5个中只有三个位置符合
所以 $\frac{3}{5}$



比赛类问题

识别：胜负概率 $\left\{ \begin{array}{l} \text{三局两胜 (两胜即停)} \\ \text{五局三胜 (三胜即停)} \\ \text{七局四胜 (四胜即停)} \end{array} \right.$

限定场次,枚举做题(列表)

【例 15】(2025 联考)三名射击运动员甲、乙、丙依次独立射击，一轮三枪，每人一枪，直至目标被射中，比赛结束。已知甲、乙、丙射中目标的概率分别为 0.3、0.5、0.8，则在一轮内，乙结束比赛概率是丙结束比赛概率的：甲乙丙不中的概率是：0.7, 0.5, 0.2

A. 1 倍

B. 1.25 倍

C. 1.5 倍

D. 2 倍

	甲	乙	丙
乙结束:	×	✓	
丙结束:	×	×	✓

$$P = \frac{0.7 \times 0.5}{0.7 \times 0.5 \times 0.8} = 1.25$$

抓阄密码类

等可能性概率问题

方法：每次概率相同

选项特征：分母规范，没有乱七八糟

【例 17】（2021 浙江）小李有一张银行卡，他忘记了密码的后 3 位，只记得这 3 个数全是

奇数且有 2 个相同。问他尝试不超过两次就输入正确密码的概率为多少？

A. $\frac{1}{30}$

B. $\frac{1}{50}$

C. $\frac{2}{59}$

D. $\frac{2}{57}$

奇数：1 3 5 7 9

总情况数先从 5 个奇数中选择两个不同的奇数： $C_5^2 = 10$ 再从中选择一个奇数为重复出现两次的： $C_2^1 = 2$ 最后考虑三位数字的顺序。后三位中选择两位重复数字： $C_3^2 = 3$ → 60 种①第一次正确 $\frac{1}{60}$ ②第一次 × 第二次 ✓ $\frac{59}{60} \times \frac{1}{59} = \frac{1}{60}$ > 分类相加

骰子问题



来源于小红书@贝栗子

骰子概率，6 × 6 枚举记心间（数字和）

小红书：@贝栗子

【例 18】（2023 联考）抛掷两颗质地均匀的骰子，记录向上的面出现的数字，那么这两个

数字之和等于 8 的概率是：

A. $\frac{5}{36}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{12}$

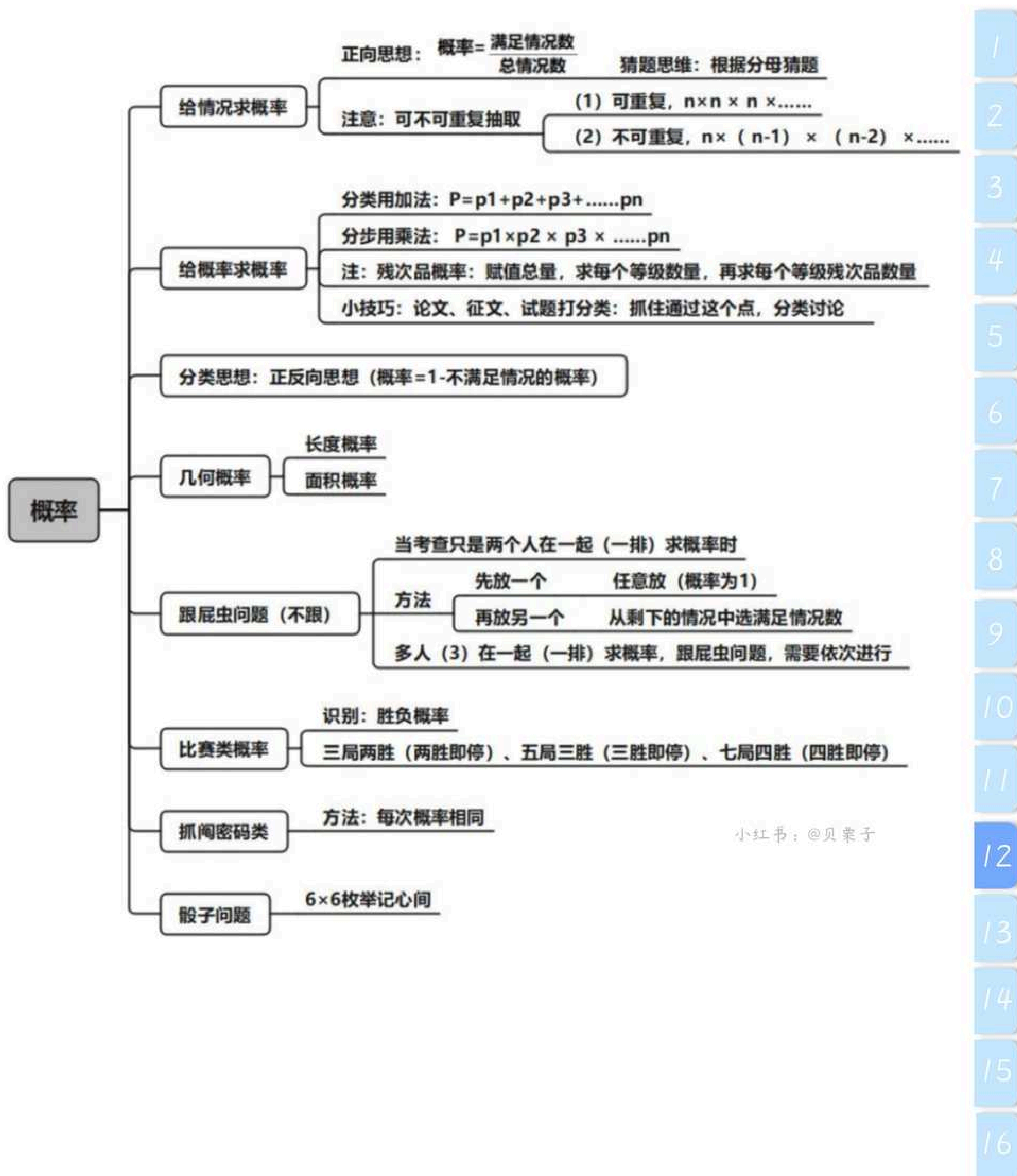
D. $\frac{5}{24}$

朝上的数字有 1~6 六种情况。

两个数字的排列顺序 $6 \times 6 = 36$ 种

之和 = 8 满足的是 (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2) —— 5 种

所以 $\frac{5}{36}$



第十三章 年龄问题

一、知识点

基础知识

- 1、每过N年都长N岁
- 2、年龄差不变
- 3、年龄倍数越来越小

高照	上岸	年龄差	倍数
36岁	26岁	10岁	1.4倍
40岁	30岁	10岁	1.3倍
50岁	40岁	10岁	1.25倍

解题方法

- 列表法--展现时间与人物关系、代入排除，倍数特性
- 设未知数解方程：设小不设大
- 常识思维，做+猜

主体年龄小
时间年份小

注意

- (1) 年龄为周岁，整数
- (2) 年龄差不变，问年龄差，结合选项倍数特性解题
- (3) 宝宝出生当年（按0岁计算），母亲25岁
- (4) 考出生不考死亡，年龄为负数代表未出生

小红书：@贝栗子

二、年龄和不定方程结合

年龄和日期均为整数，利用不定方程特性求解

世纪和年代

- 198? 20世纪八十年代
- 199? 20世纪九十年代
- 202? 21世纪

三、年龄和年龄的平方

识别：平方数等于那一年的年份

方法

- (1) 1892+44=1936(44的平方)
- (2) 1980+45=2025(45的平方)
- (3) 2070+46=2116(46的平方)

四、属相和本命年

12生肖

子鼠、丑牛、寅虎、卯兔、辰龙、巳蛇、午马、未羊、申猴、酉鸡、戌狗、亥猪。

注意：本命年以12为周期

1. 年龄特性解题和方程法解题

①

【例1】(2025 联考) 5年后小田父亲的年龄将是小田年龄的2倍, 10年前小田祖父的年龄是小田年龄的6倍。已知小田祖父比小田父亲大25岁, 问小田今年多少岁?

A. 20

B. 22

C. 25

D. 26

	小田	田父亲	田祖父
10年前	x	$6x-25$	$6x$
今年	$x+10$		
5年后	$x+15$	$6x-10$	

$2(x+15)=6x-10$ 得 $x=10$ 所以今年小田20岁

主体乱, 可以用列表方法

2. 年龄和不定方程结合

【例10】(2025 全国事业单位) 今年, 甲与乙的年龄和等于丙的年龄, 三人年龄均小于30岁且平均年龄小于20岁。5年后, 乙年龄的2倍比甲和丙年龄之和少10岁。问今年三人年龄之和可能的最大值为()。

A. 46

B. 52

C. 58

D. 64

可以知道三人中年龄最大的小于30岁, 三人年龄之和不可能大于60岁。——排除D

问最大, 则从C代入

C: 甲+乙+丙=58

因为今年甲+乙=丙, 所以今年丙=29岁

则今年甲+乙=29

5年后, 根据①:

 $2(\text{乙}+5)+10=(29-\text{乙})+29+5+5$

得今年乙=16岁 甲今年=29-16=23岁符合

3. 年龄和年龄的平方

来源于小红书@贝栗子

小红书: @贝栗子

【例12】(2022 联考) 有一个20世纪八九十年代出生的人, 在21世纪, 恰好有一年, 他年龄的平方数等于那一年的年份。这个人是哪年出生的?

A. 1995

B. 1990

C. 1985

D. 1980

 $1980+45=2025$ $198x \sim 199x$

2025

4. 属相和本命年

【例13】(2018 吉林) 某业务处长和科员两人属相相同, 科员在第一个本命年时处长是第三个本命年。科员今年20岁, 当处长年龄是科员年龄的2倍时, 需要经过的时间是:

A. 7年

B. 4年

C. 5年

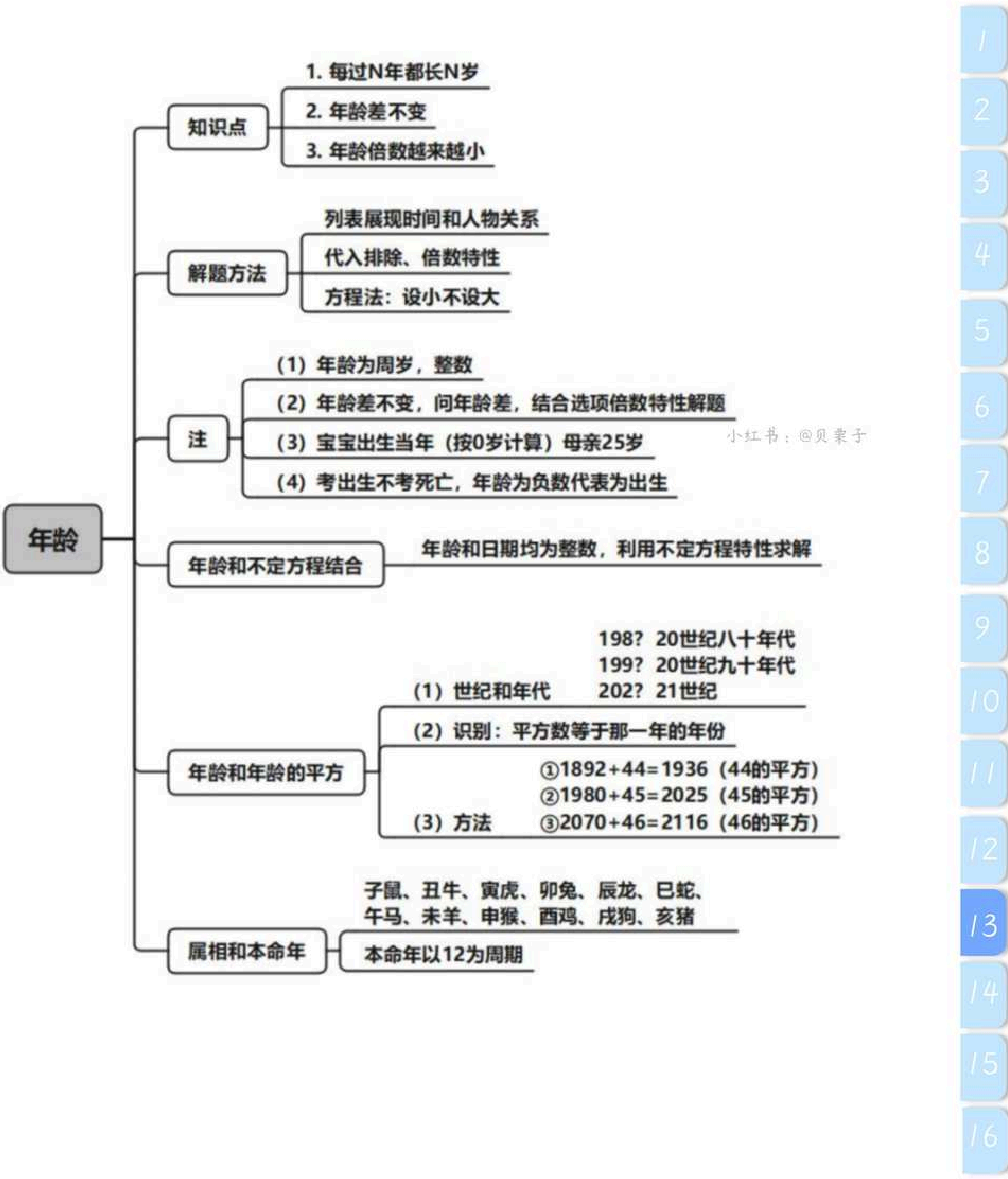
D. 6年

可知差24岁

列表:

	处长	科员
今年	44	20
+n	$44+n$	$2(20+n)$

得 $n=4$



第十四章 溶液问题

解题方法

公式法

溶液 = 溶质 + 溶剂

$$\text{浓度} = \frac{\text{溶质}}{\text{溶液}}$$

溶质 = 溶液 × 浓度

线段法

(1) 部分写两边，整体写中间。

(2) 距离和量成反比。

生活常识：水和酒精，倒来倒去，来来回回，有来有回

溶液三者混合：A+B+C 两两混合

考法

两类混合

多者混合：两两混合

方法1：公式法 浓度 = 溶质 / 溶液

方法2：三者混合：变成两两混合

小技巧：

两种溶液浓度相同

目的：快速消掉两边的未知数

原理：分数比例不变

$$\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B-D} = \frac{A+C}{B+D}$$

$$\frac{12}{200+x} = \frac{10.5}{100+x}$$

① 交叉相乘 $12(100+x) = 10.5(200+x)$

② 比例不变

$$\frac{12}{200+x} = \frac{10.5}{100+x} = \frac{12-10.5}{(200+x)-(100+x)} = \frac{1.5}{100}$$

③ 分数通分

$$\frac{12}{200+x} = \frac{1.5}{100} = \frac{12}{800} \quad \text{得 } x = 600$$

(例1-两类混合)

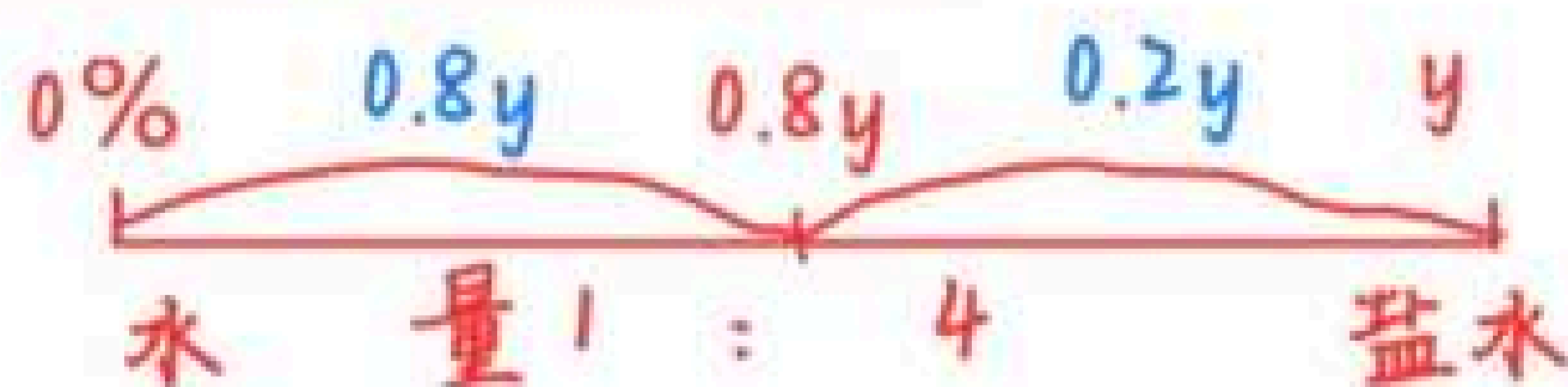
【例2】(2024 联考) 一次化学实验中，稀释一定量的盐水，在此盐水中加入 100g 水后，其浓度变为原来的 80%，则原盐水质量为：

A. 200g

B. 300g

C. 400g

D. 500g



盐水的质量是4份则400g

设原来溶液 xg ，浓度为 y

$$\text{所以浓度} = \frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} = \frac{xy}{x+100} = 80\%y$$

得 $x = 400$

(例2-多者混合)

① 公式 ② 多者混合变成两两混合

【例8】(2023 江苏) 浓度分别为 68%、72%、78% 的三种酒精溶液的总质量为 240 克。

若将它们全部混合, 则可得浓度为 74% 的酒精溶液; 若只将浓度为 72% 和 78% 的酒精溶液混合,

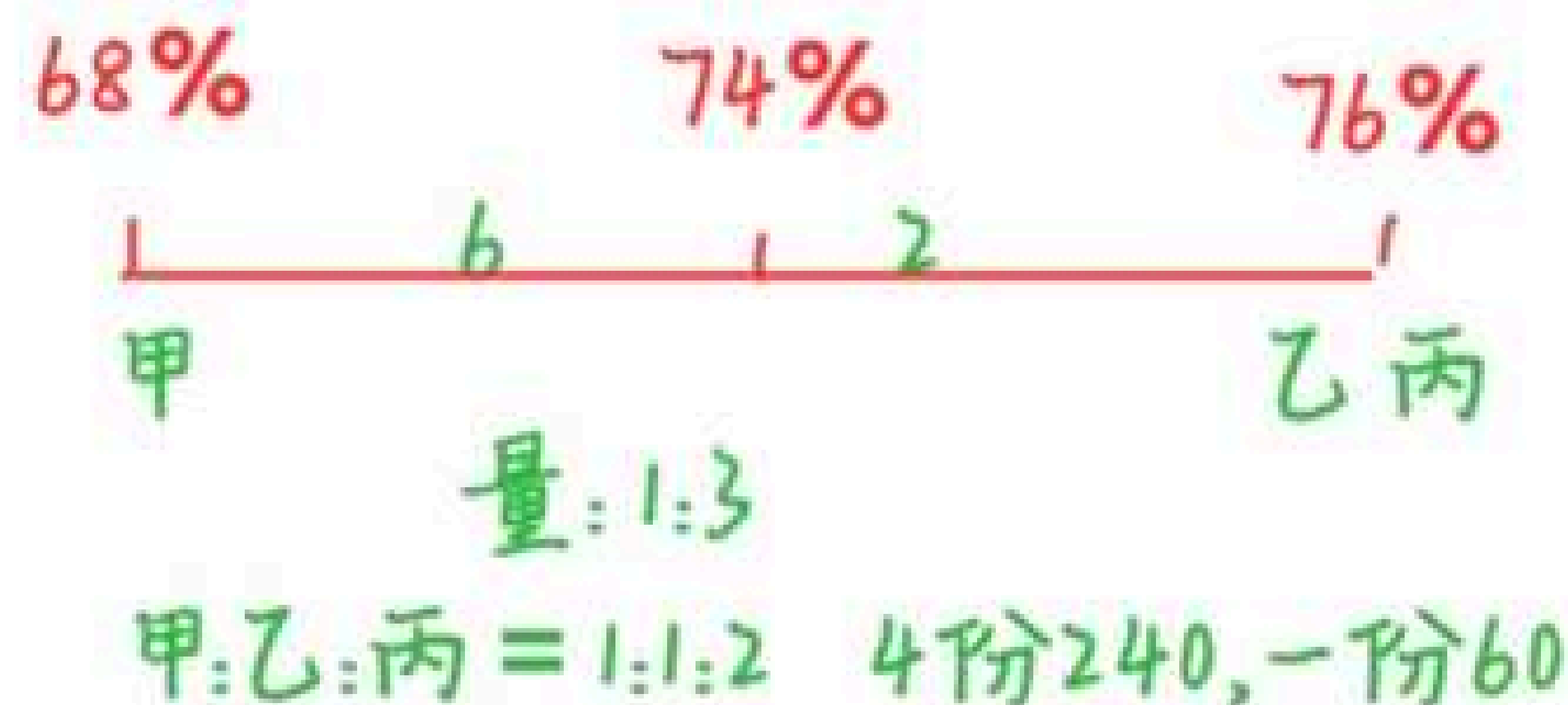
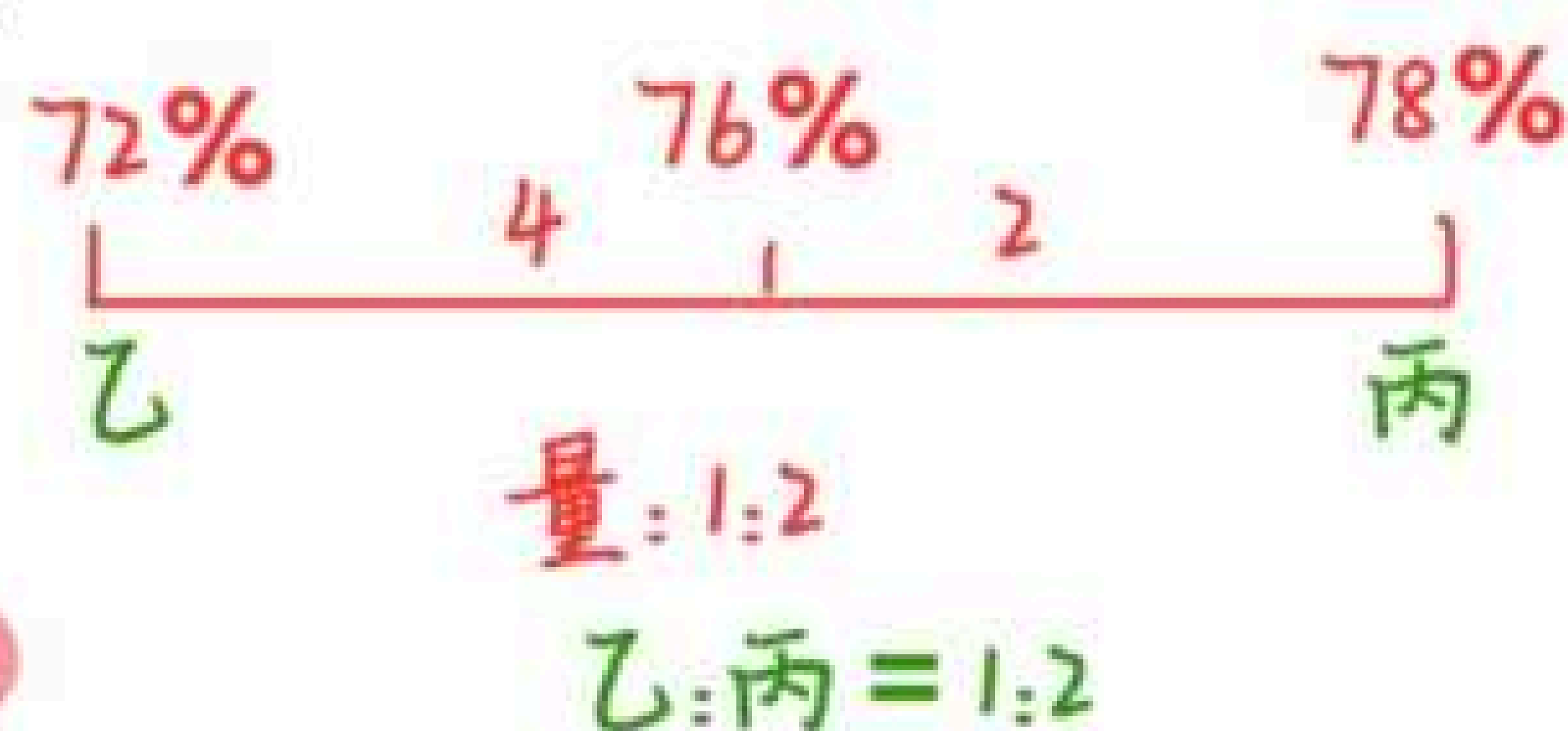
则得浓度为 76% 的酒精溶液。这三种酒精溶液中, 浓度为 72% 的酒精溶液质量为 ()。

A. 30 克

B. 40 克

C. 48 克

D. 60 克



等量变化

(溶质不变)

稀释: 溶液... $n\%$, 加一定量的水, 浓度变为 $m\%$, 再加入等量的水

蒸发: 溶液... $n\%$, 蒸发一定量的水, 浓度变为 $m\%$, 再蒸发等量的水

方法:

- (1) 列表 (溶质 = 溶液 $\times$ 浓度)
- (2) 赋值溶质 (浓度的公倍数即可)
- (3) 求加入、蒸发水的量

来源于小红书@贝栗子

【例9】(2023 福建事业单位) 有一杯盐水, 第一次往杯内加入一些水后浓度变为 12%,

第二次再加入同样多的水后浓度变为 8%, 第三次再加入同样多的水后浓度变为 ()。

A. 7%

B. 6%

C. 5%

D. 4%

同样: 列表

溶质	溶液	浓度
24	200	12%
24	300	8%
24	400	6%

$$\text{所以浓度} = 24 \div 400 = 6\%$$

【例11】(2022 湖北选调) 将一满容器浓度为 24% 的溶液放置太阳下暴晒一段时间, 经过

一段时间蒸发水分后溶液浓度变为 36% 且无沉淀。然后再用浓度为 12% 的溶液将容器加满。请

问容器内溶液浓度变为多少? 溶质 = $300 \times 24\% = 72g$

A. 24%

B. 28%

C. 30%

D. 32%

溶质 = 溶液 $\times$ 浓度

72	300g	24%
72	200g	36%

稀释 100g 水

$$\text{浓度} = \frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} = \frac{72 + 12}{300} = 28\%$$

反复操作

溶液浓度为 $n\%$,倒出比例 a ,水加满,再倒出比例 b ,水加满,再倒出比例 c ,水加满。
最后浓度为: $n\% \times (1-a) \times (1-b) \times (1-c)$

【例 13】(2024 联考) 现有一容器, 装有 100 克浓度为 75% 的盐水, 从中倒出 40 克盐水后, 再加入 40 克纯净水, 如此反复三次。问此时盐水的浓度是:

- A. 16.20%
- B. 9%
- C. 1.62%
- D. 0.90%

$75\% \times (1-40\%) \times (1-40\%) \times (1-40\%)$
 $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{81}{500} \approx 16\%$



第十五章 平方数、植树和方阵问题

平方数

表达方式:

- (1) 总数正巧满足每个村民采摘的个数都等于该村村民数
 (2) 订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数

技巧: 平方数

常考:

- ① 100以内
 ② 相加 = 100
 ③ 相差 45
 (4 → 49,
 36 → 81)

例子:

总数
 1人 → 甲 → 1个
 2人 → 甲 → 2个
 乙 → 2个 $2 \times 2 = 2^2 = 4$ 个
 3人 → 甲 → 3个
 乙 → 3个 $3 \times 3 = 3^2 = 9$ 个
 丙 → 3个

【例1】(2023 联考) 10名志愿者准备将村民们刚采摘的一堆西瓜平均装上甲、乙两辆运输车, 西瓜总数正巧满足每个村民采摘的西瓜个数都等于该村村民数。志愿者们先每人抱一个西瓜放到甲车上, 然后每人抱一个西瓜放到乙车上, 依次轮流进行, 直到所剩西瓜少到容易清点时再平分。当最后1次把10个西瓜放到甲车后, 发现所剩西瓜不足10个, 于是, 不得不从甲车抱出几个与所剩西瓜一起放到乙车上, 此时刚好两车所装西瓜一样多。问最后从甲车拿出几个西瓜?

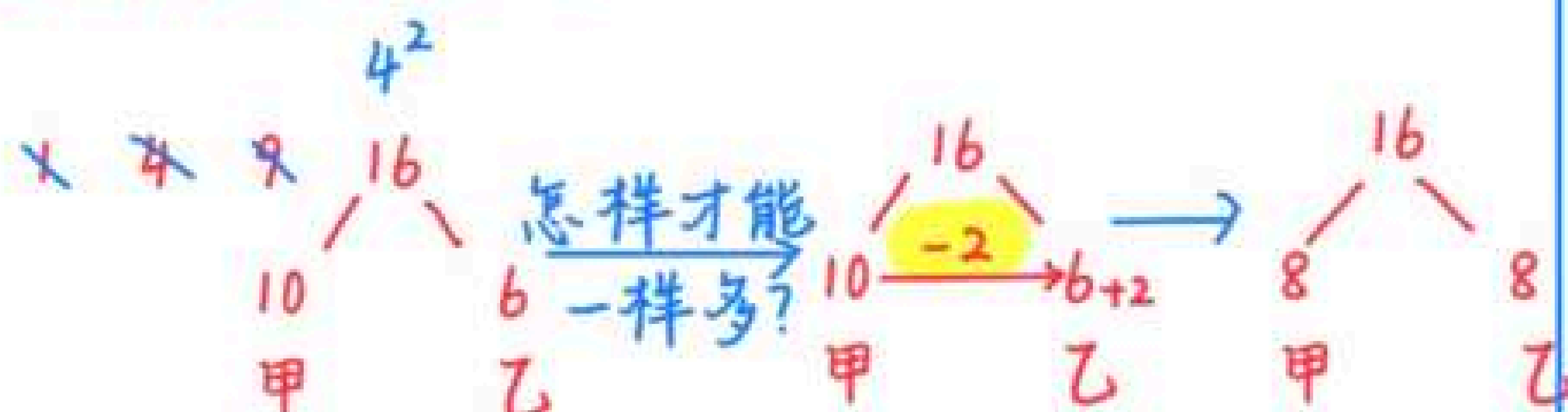
判定: 总数平方数 > 10

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



25呢?

甲10
 甲5

36呢?

甲10
 甲10
 乙10
 乙6

! 答案唯一, 平方数不唯一

【例2】(2022 联考) 甲、乙两家大型医疗公司的负责人各带一名助手参加展会订购医疗器械。最终订单显示: 每人各自订购了不同种类医疗器械, 且其订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数。每人订购的医疗器械种类数都未超过15类, 并且两位负责人所订购的医疗器械台数不同, 但都比自己的助手多购45台。问甲、乙两公司一共订购了多少台医疗器械?

A. 150

B. 170

C. 210

D. 240

判定: 总数平方数 < $15^2 = 225$ 台

! 关键: 相差45

4 → 49

36 → 81

4人共 $4 + 49 + 36 + 81 = 170$

植树问题

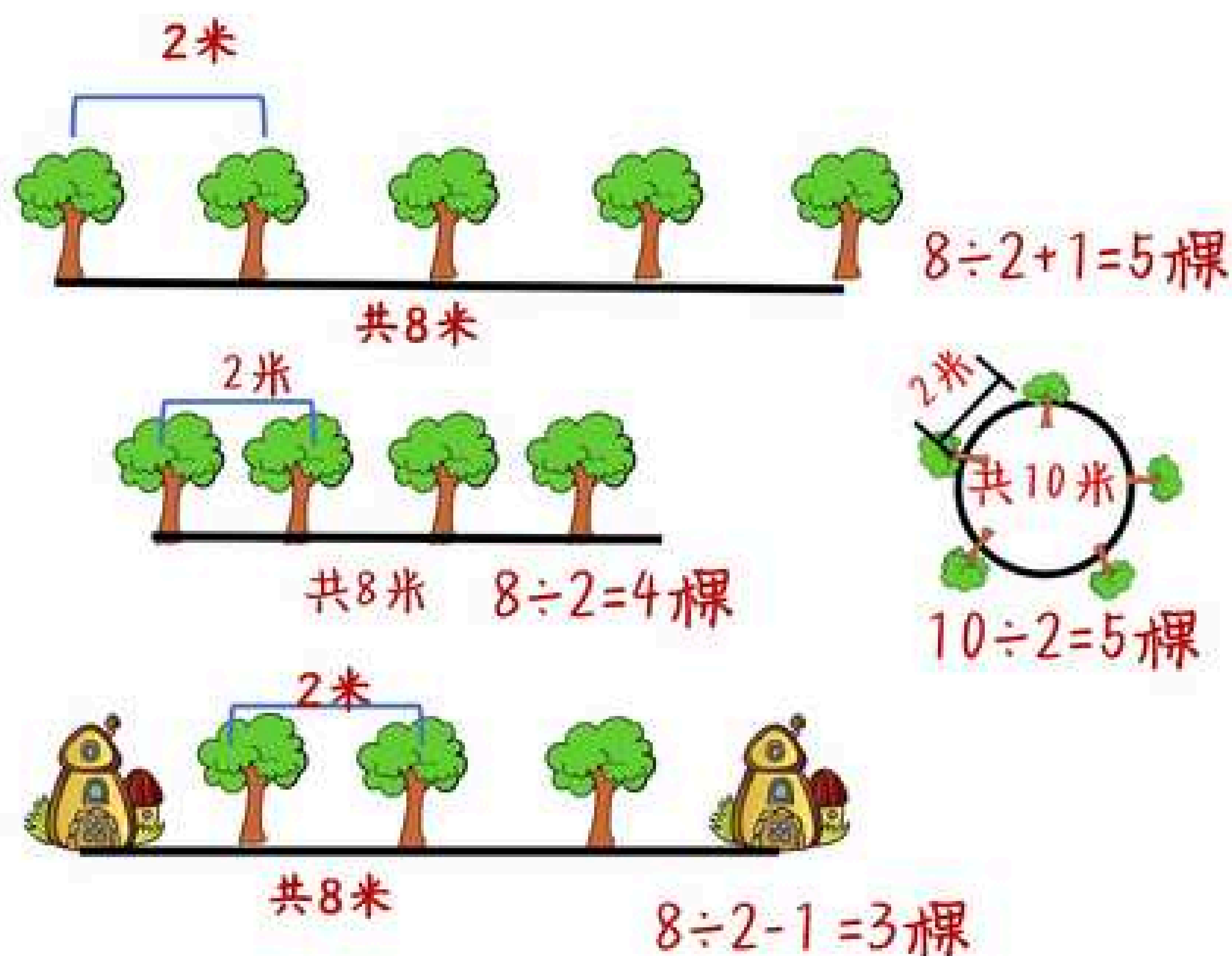
两端植树：棵数 = 段数 + 1 = $\frac{\text{路长}}{\text{间隔}} + 1$

单端（环形）植树：棵数 = 段数 = $\frac{\text{路长}}{\text{间隔}}$

楼间植树：棵数 = 段数 - 1 = $\frac{\text{路长}}{\text{间隔}} - 1$

注意

- ① 分清是两端、单端（环形）、楼间
- ② 注意两侧种树要 $\times 2$
- ③ 马路无特殊说明为（两端）植树



小红书：@贝栗子

【例3】（2025 广东）某单位计划在一块直角三角形的绿地周边栽种树木，先在3个顶点各栽种1棵，再从顶点开始每隔4米栽种1棵，如果两条直角边（包含顶点）分别栽种4棵和5棵，则该绿地周边一共栽种了（ ）棵树。

A. 12

段数 = 3 + 4 + 5 = 12

B. 13

棵数 = 段数 = 12的倍数

C. 14

D. 15

选A

区分

间隔长度一致的
存在整除

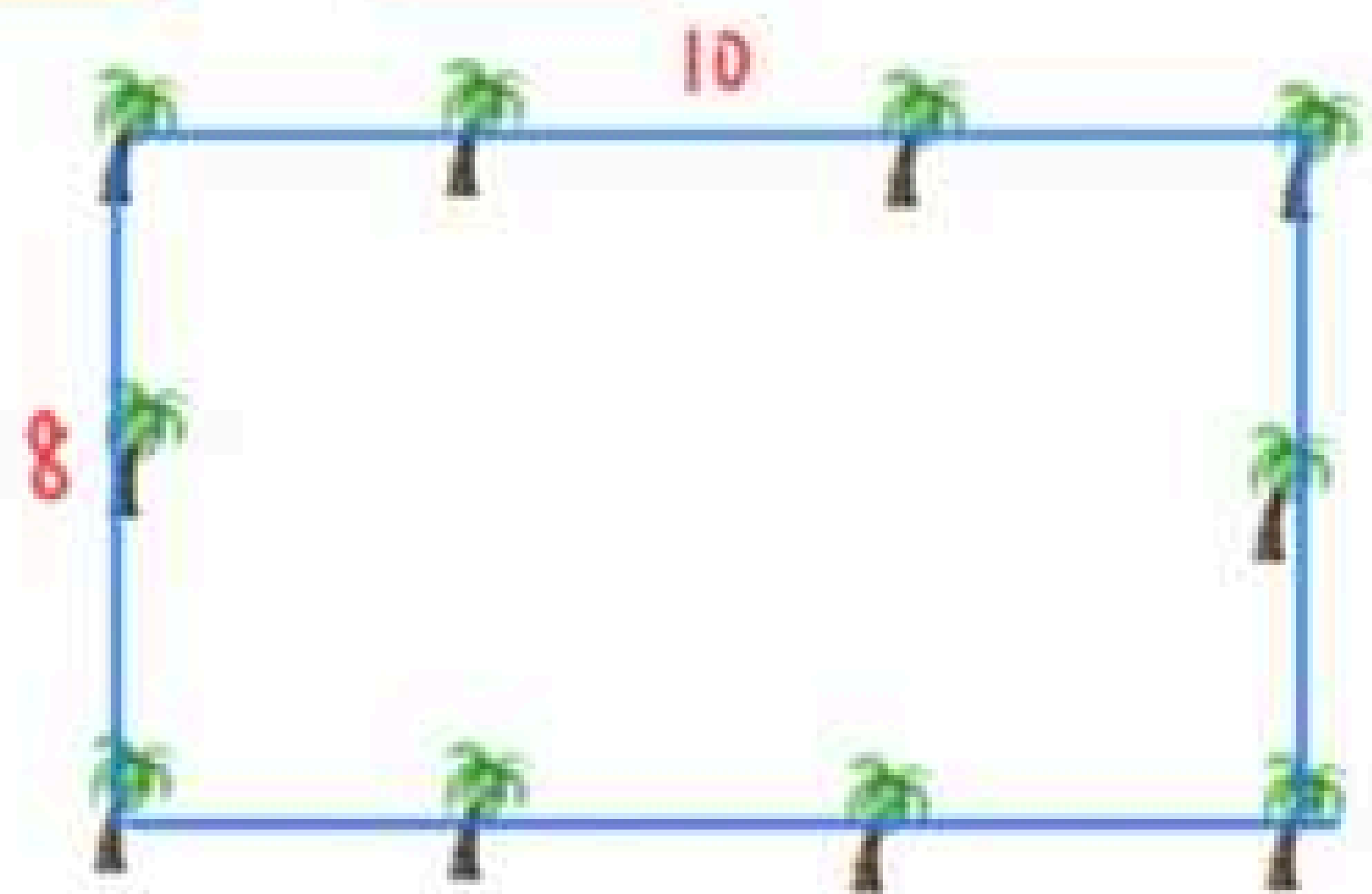
【例4】（2022 广东）有一个长方形花坛，长为10米，宽为8米。现要在花坛四周安装栅栏，要求4个顶点处各插一根木桩，除顶点处的木桩外，每边还要插若干木桩，且每两根木桩间的距离至少为3米，则最多可以插（ ）根木桩。

A. 10

B. 12

C. 14

D. 16



问最多

则每段间隔尽量接近3

$$\frac{10}{3\text{米}} = 3.3\text{段}$$

$$\frac{10}{3.3\text{米}} = 3\text{段种4棵}$$

$$\frac{8}{4\text{米}} = 2\text{段}$$

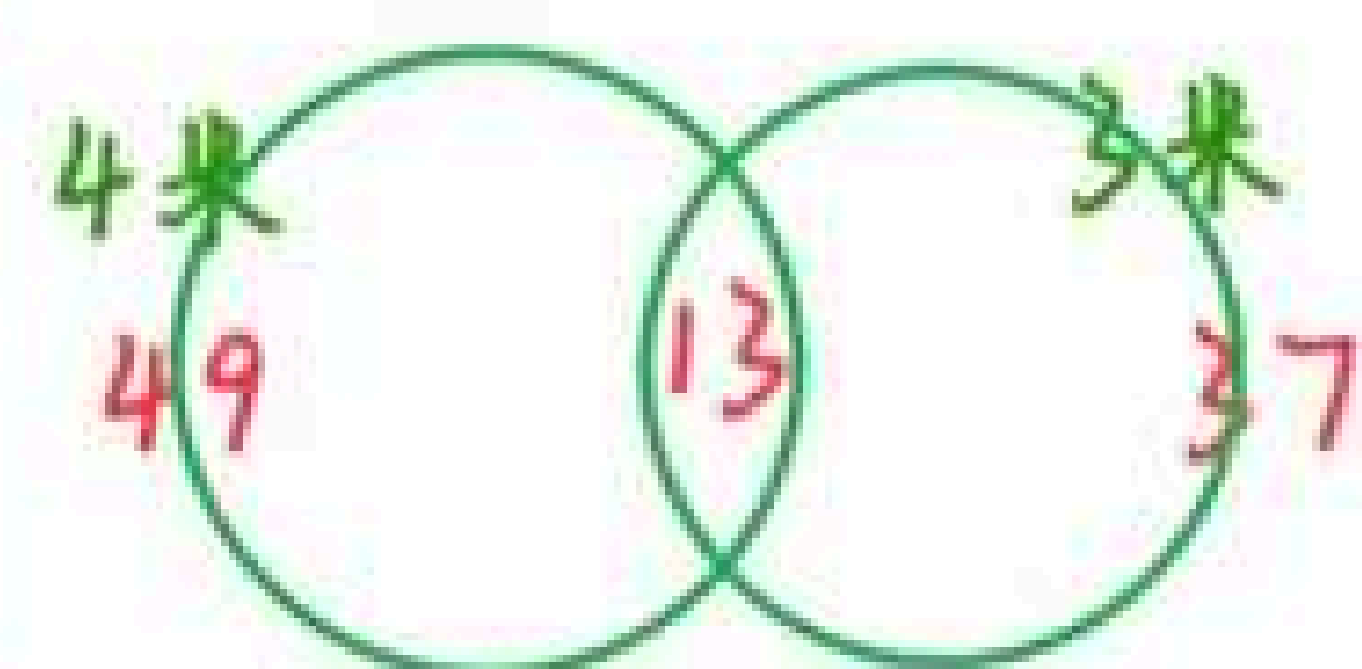
间隔长度不一致的
画图解决!!!

✓ 不移动植树 (最小公倍数不移动)

方法 { ① 明确总长度
② 求间隔长度的最小公倍数
③ 求不移动棵树

例子：长 144 米公路的一侧从一端到另一端每隔 3 米植一棵树，现在要改成每隔 4 米植一棵树，有多少不需要移动？ ② 最小公倍数 $3 \times 4 = 12$ ③ $144 \div 12 + 1 = 13$ 棵不动

问法 2：再挖几个坑？



$$\begin{aligned} \text{① } \frac{144}{3} + 1 &= 49 \text{ 棵} \\ \text{② } \frac{144}{4} + 1 &= 37 \text{ 棵} \\ \text{③ } \frac{144}{12} + 1 &= 13 \text{ 棵} \end{aligned}$$

4米的话种37棵,有13棵不移动
所以再挖 $37 - 13 = 24$ 个坑

✓ 容斥原理植树问题

容斥原理和植树问题结合 (交集种1棵树)

方法：求棵数+容斥原理公式运用

- ① 分别算出各需多少
- ② 最小公倍数
- ③ 减去重复的

小红书：@贝栗子

【例 9】(2024 广东) 某个障碍跑项目需要在 100 米长的跑道上布置障碍 (起点和终点均不布置)。如果从起点开始，每隔 4 米布置一个甲障碍，每隔 6 米布置一个乙障碍，甲、乙障碍的重合点则不布置甲障碍。则跑道上总共布置 () 个甲障碍。

A. 16

B. 17

C. 24

D. 25

! 楼间植树问题 $\frac{\text{总长}}{\text{间隔}} - 1$

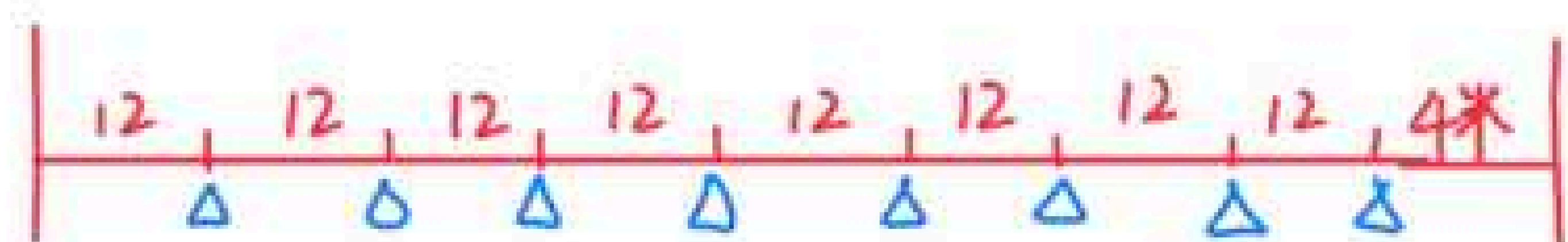
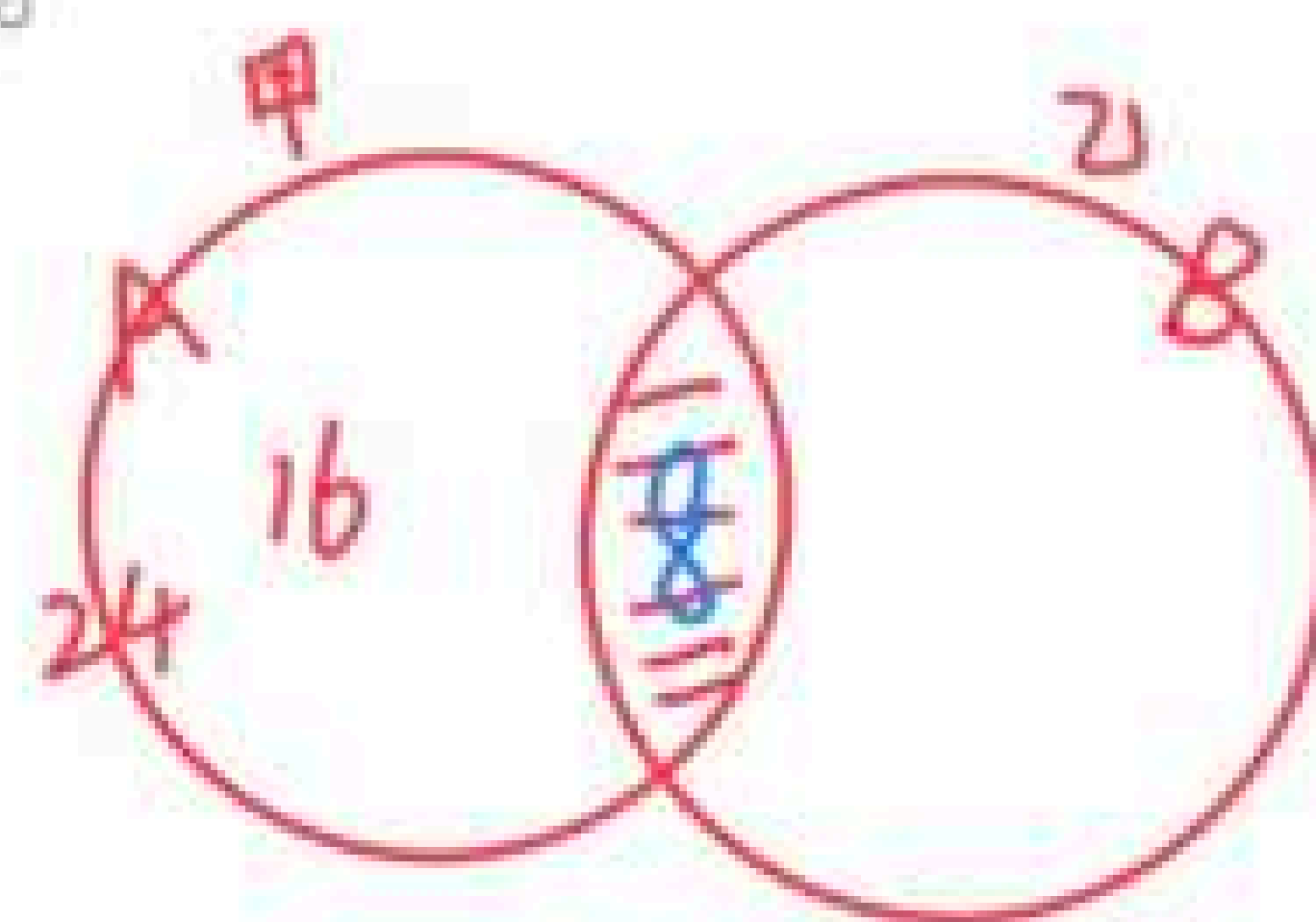
$$4 \text{ 米: } \frac{100}{4} - 1 = 25 - 1 = 24$$

重合的地方不铺甲的话,最小公倍数是12

$$\frac{100}{12} = 8 \text{ 段} \dots 4 \text{ 米}$$

不整除所以9段

又因为楼间种树-1,所以 $9 - 1 = 8$



所以 $24 - 8 = 16$ 个甲

方阵问题

N 阶实心方阵：总人数 = N^2 最外圈 = $4N-4$ 人 相邻两圈相差：8 人

注意 [① 方阵求整体，巧用平方数
② 去掉一行一列，去掉了 $2N-1$

长方形方阵：① 实心方阵人数 = MN ② 最外层人数 $2(MN) - 4$ ③ 相邻两圈差 8 人

(1) 猜：平方数 (2) 两个实心方阵组成新的实心方阵， $a^2 + b^2 = c^2$ (常考 6、8、10)

【例 12】(2024 深圳) 某灯光秀表演中，无人机群先排列成红、绿两个正方形实心方阵，然后融合并变换灯光，形成一个黄色的正方形空心方阵。原红方阵最外侧每边有 8 架无人机，且原红方阵恰好可填满黄方阵的空心，原绿方阵最外侧每边的无人机数量比黄方阵少 4 架。则参加灯光秀表演的无人机共有 () 架。

- A. 260 $64 + 196$
- B. 233 $64 + 169$
- C. 196 $64 + 132$
- D. 185 $64 + 121$

平方数 + 平方数 = 平方数
红 + 绿 = 黄
8 行 8 列
 $N = 8$
 $N^2 = 64$
平方

黄 + 红 = 实心 → 平方数
黄色 + 64 = 平方数
A 选项 + 64 = 324 ✓
B 选项 + 64 = 297 ✗
D 选项 + 64 = 239 ✗

来源于小红书@贝栗子

小红书：@贝栗子

(1) 总数正巧满足每个村民采摘的个数都等于该村村民数

(2) 订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数



第十六章 容易拿分问题

钟表问题

常识

表盘一圈分成了12大格(60小格),时针每小时转1大格,分针每小时转12大格(60小格)

时针的速度:每分钟走 0.5° ;分针的速度:每分钟走 6° 。两者速度差 $5.5^\circ/\text{分钟}$

每天24小时,时针和分针重合22次,时针和分针垂直44次

1大格 30° ,1小格 6°

一整天分针走过24圈,时针走过2圈。分针比时针多走22圈

【例1】(2025 上海)在北京工作的小王被单位派遣去法国出差,已知法国(夏令时期间)比北京的时间晚6个小时。若某天公司要在北京时间晚上7时35分开一个线上会议,他从工作地点回到酒店参会要42分钟,若他在当地时间12时30分出发,则他会:

- A. 迟到20分钟
B. 迟到23分钟
C. 早到23分钟
D. 早到20分钟

北京时间:7点35分
则■时间1点35分

来源于小红书@贝栗子

所以 $12:30 + 42\text{分} = 1:42$
所以 $35 - 12 = 23\text{分钟}$

猜题:

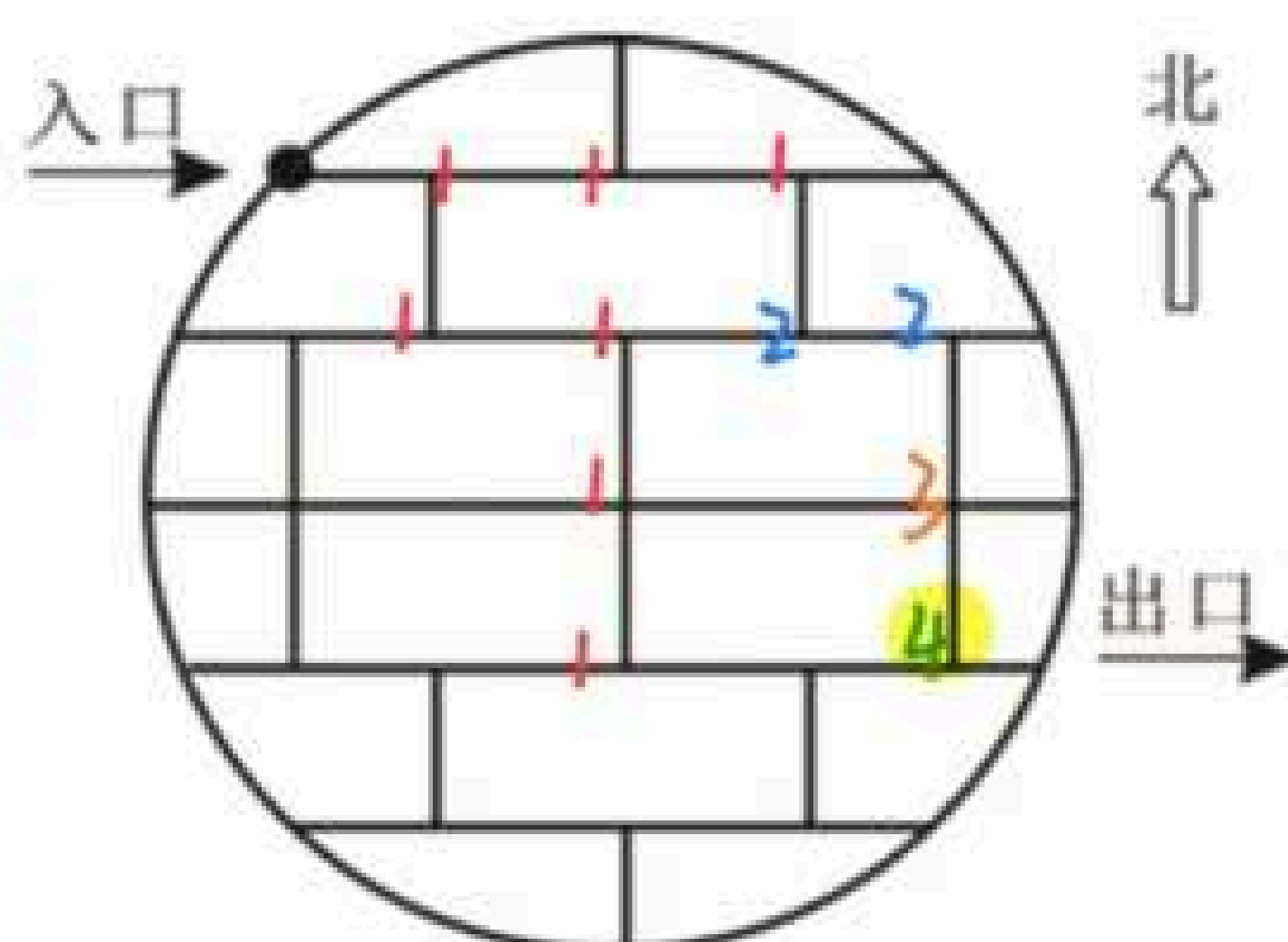
 $5 - 2 = 3$ 猜尾数3 C

标1法

给定几何图,规定方向或者最短路径,到目的地有多少种走法?

方法:标1,路口加和

【例6】(2021 广东选调)小明参加迷宫游戏,迷宫设在圆形区域内(布局如下图所示),游戏规定只能向正东或正南方向行走,那么小明从迷宫入口到出口共有()种走法。



- A. 2
B. 4
C. 6
D. 8

方法:都是在路口处标数字

空瓶换酒

M 个空瓶换 N 瓶酒，x 个空瓶最多可以喝 $\frac{xN}{M-N}$ 瓶酒

【例3】如果 4 个汽水空瓶可以换 1 瓶汽水，现有 12 个汽水空瓶，不交钱最多可以喝汽水？

$$\frac{xN}{M-N} \quad x=12, N=1, M=4 \text{ 代入公式 } \frac{12 \times 1}{4-1} = 4$$

【例9】（2019 山东）某啤酒厂为促销啤酒，开展 6 个空啤酒瓶换 1 瓶啤酒的活动，孙先生去年花钱先后买了 109 瓶该品牌啤酒，期间不断用空啤酒瓶去换啤酒，请问孙先生去年一共喝掉了多少瓶啤酒？

说明5个空→1瓶

A. 127

B. 128

C. 129

D. 130

$$\frac{109}{5} = 21.8 \text{ 即 } 21 \text{ 瓶}$$

$$\text{所以 } 109 + 21 = 130$$

货物集中——统筹运输问题

货物集中问题：先中间分开，轻的向重的方向移动

来源于小红书@贝栗子

向重的仓库搬，钱 = 吨数 × 距离 × 单价

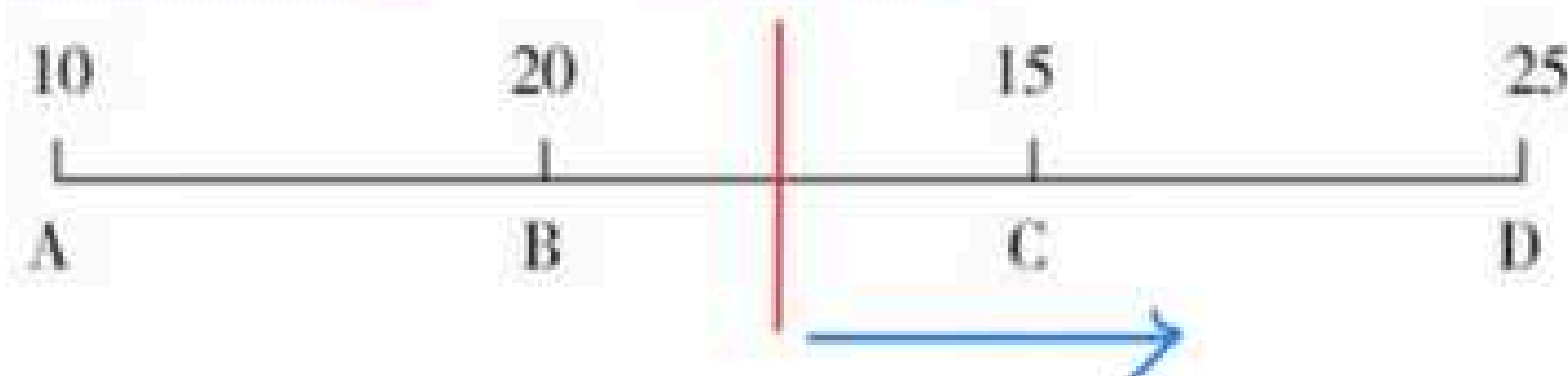
典型特征：货物集中到哪，成本最低



解题思路：不看长度，只比重量；轻的流向重的

方法 ① 划线-② 求和 ③ 轻→重

【例11】（2020 联考）某电商平台每隔 5 千米有一座仓库，共有 A、B、C、D 四座仓库，图中数字表示各仓库库存货物的吨数。现需要把所有的货物集中存放在其中某一个仓库中，如果每吨货物运输 1 千米需要运费 3 元，要使运费最少，则需将货物集中到哪座仓库？



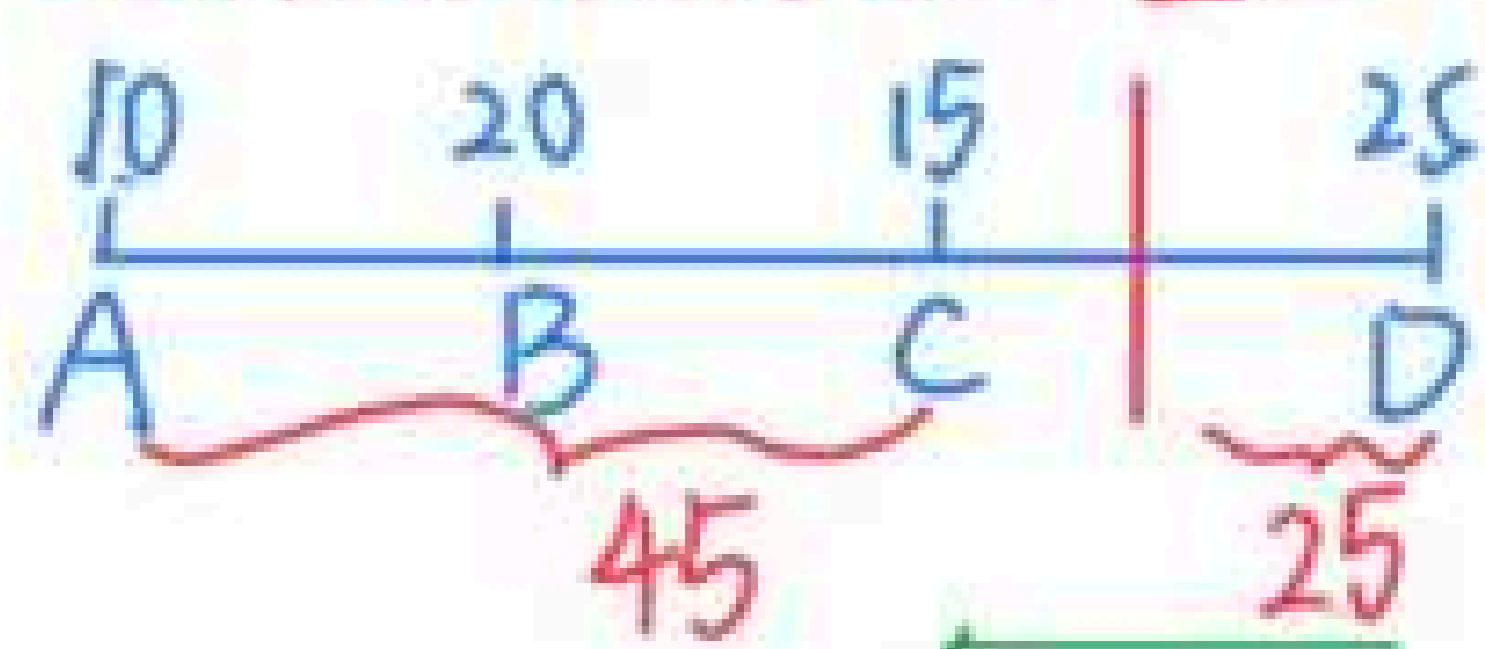
A. 仓库 A

B. 仓库 B

C. 仓库 C

D. 仓库 D

从中间分开，AB 重 30 CD 重 40 向重的方向移动(CD)



接着 ABC 重 45 D 重 25 向 C 移动

线切面问题

直线数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
面数	2	4	7	11	16	22	29	37	46

【例 13】（2016 吉林）用直线切割一个有限平面，后一条直线与此前每条直线都要产生新的交点，第 1 条直线将平面分成 2 块，第 2 条直线将平面分成 4 块，第 3 条直线将平面分成 7 块，按此规律将平面分为 46 块需：

- A. 7 条直线
- B. 8 条直线
- C. 9 条直线
- D. 10 条直线

秒杀，记住那几个就行😎

小红书：@贝栗子

时间统筹

特征：同时进行很多项工作，时间最少
方法：见缝插针

【例 15】（2023 北京）小王去医院看病，上午要看 3 个科室的门诊（已提前完成了挂号取号）。

以下是当天小王在医院发生的所有诊疗相关活动和相应的时间（单位：分钟）。已知同一科室靠左的项目完成后才能进行靠右的项目且每个项目只进行 1 次，等待化验结果时可以进行其他科室的项目，且多个科室的交费环节或多个科室的取药环节可以合并一次完成。则小王完成所有诊疗活动最少需要多少分钟？

项目 科室	问诊、开检查单、 开药	检查（药费）单 交费	检查/治疗	等待化验结果	药房取药
科室 1	5	3	10	20	/
科室 2	10	3	/	/	5
科室 3	10	3	/	/	5

- A. 74
- B. 63
- C. 54
- D. 46

至少5+3+10+20+3+5=46分钟

可以同时做

爬楼问题

例子：从1楼爬到6楼，实际爬了（5）楼，休息了（4）次

结论：从1楼爬到N楼，实际爬了N-1楼，休息了N-2次

【例17】（2021 联考）送奶工人给11楼住户送牛奶，由于小区停电导致电梯无法使用。如果他走楼梯从第1层到第2层需要5秒，以后每多走一层需多花2秒，其中走到5层以后每多走一层需多休息5秒，那么他走到11层需要多少秒？

A. 210

B. 215

C. 220

D. 235

从1楼爬到11楼，实际爬了10楼，爬到第5层后休息5次。

看题可知是等差数列 $a_1 = 5s$ $a_{10} = a_1 + 9d = 5 + 18 = 23s$

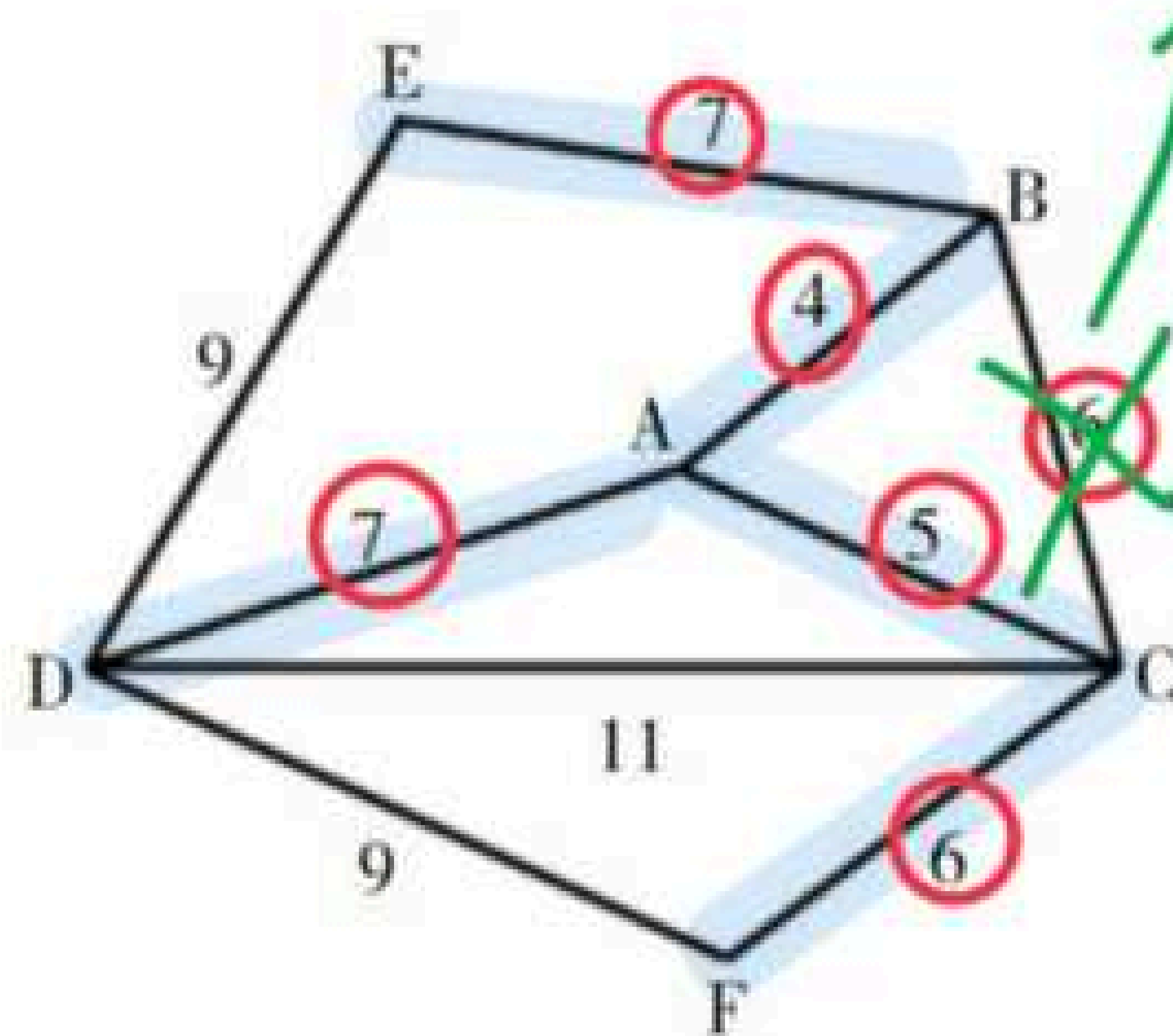
$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = 140s + 75s = 215$$



网状图

找最短距离

【例19】（2025 江苏）某科技园区计划铺设电缆联通A、B、C、D、E、F六栋办公楼，可以铺设电缆的线路如下图所示，每条边上的数字表示两栋楼之间线路的长度（单位：10米），则铺设电缆的总长度最短是（ ）。



因为闭环了

六栋楼需要5根线

①先找最短的4 5 6 6 7 7

$$\text{所以 } 4 + 5 + 6 + 7 + 7 = 29$$

A. 280 米

B. 290 米

C. 310 米

D. 350 米

两个点:

三个点:

四个点:

3根线

脑筋急转弯——天平问题

考法：(1)天平称重
(2)天平找假币
小秘密：3

根据天平找假币的固定结论,使用 n 次天平
最多可判3的 n 次幂个球
小秘密：3 (正确率99.9%)

结论：当有 X 个球， $3^{n-1} < X < 3^n$ ， n 次天平找出

【例 22】(2012 浙江) 有一架天平，只有 5 克和 30 克的砝码各一个。现在要用这架天平

把 300 克味精平均分成 3 份，那么至少需要称多少次？

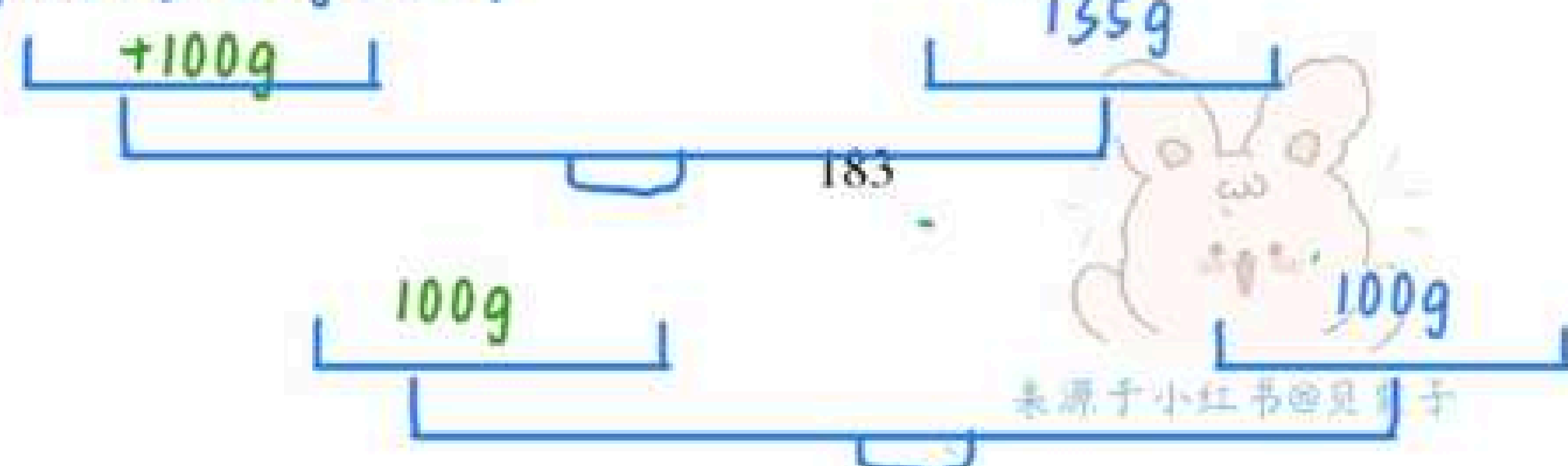
A. 3 次 ① 30 码 + 300g 均分

$$\frac{30+300}{2} = 165g$$

B. 4 次 30g 砝码 + 135g

C. 5 次

D. 6 次 5g 砝码 + 30g 砝码



【例 25】(2023 浙江) 有 30 个 2 克的砝码和 8 个 5 克的砝码，如果砝码只能放一边，

么从 2 克到 100 克间的整数克质量，有多少个不能用这些砝码称量出来？

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

难题：复杂的不用想怎么操作!!!
看到天平问题，选3的概率99.9%



